

X

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

---

SERIE QUINTA

---

RENDICONTI

---

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

VOLUME XVI.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

---

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 7 luglio 1907.*

**Matematica.** — *Sullo sviluppo delle funzioni implicite.* Nota del Corrispondente T. LEVI-CIVITA.

I metodi classici del calcolo offrono due distinti sviluppi per una funzione  $y$  di  $x$ , che sia definita, nell'intorno di un valore generico  $x_0$ , da una equazione implicita del tipo

$$(I) \quad y - x + \varphi(y) = 0:$$

1°. Lo sviluppo (abbreviato, o eventualmente la serie) di Taylor, procedente per potenze di  $x - x_0$ .

2°. Lo sviluppo (abbreviato, o eventualmente la serie) di Lagrange.

Lo stesso vale più generalmente per una funzione  $f$  della radice  $y(x)$  definita dalla (I).

Nello sviluppo di Taylor, l'ordine dei vari termini (rispetto ad  $x - x_0$ , riguardata come quantità di prim'ordine) cresce di una unità da ciascun termine al successivo. Lo sviluppo presenta però l'inconveniente che l'espressione dei coefficienti, in funzione di  $f$ ,  $\varphi$  e loro derivate, è assai complicata.

Nello sviluppo di Lagrange si trovano, per così dire, scambiati pregi e difetti. I vari termini hanno una espressione semplice, ma viceversa nulla si può dire in generale circa l'ordine di grandezza rispetto alla differenza  $x - x_0$ .

Scopo della presente Nota è di assegnare uno sviluppo, che congiunge i due requisiti: aumento progressivo dell'ordine, e perspicuità della legge di formazione dei singoli termini.



1. Sia  $\varphi(y)$  una funzione della variabile (diciamo reale, per fissar le idee)  $y$ , la quale, in un certo intorno del valore  $y_0$ , si mantenga finita e continua, assieme alle sue derivate prima, seconda, ecc., fino ad un generico ordine  $n (\geq 1)$ .

Supposto che

$$(1) \quad 1 + \varphi'(y_0) \neq 0,$$

consideriamo l'equazione

$$(1) \quad y - x + \varphi(y) = 0,$$

e chiamiamo  $x_0$  il valore di  $x$ , che essa fa corrispondere ad  $y_0$ .

Nell'intorno della coppia  $x_0, y_0$ , la (I) definisce univocamente tanto  $x$  in funzione di  $y$ , quanto anche, per la disuguaglianza (1), la funzione inversa  $y$  di  $x$ . Designeremo la prima con  $x = v(y)$ , la seconda con  $y = u(x)$ . Si noti che la  $v(y)$  è esplicitamente fornita dalla (I), ed ha l'espressione

$$(2) \quad v(y) = y + \varphi(y).$$

Le fatte ipotesi assicurano notoriamente che entrambe le funzioni  $u(x)$ ,  $v(y)$  risultano finite e continue assieme alle loro derivate, fino all'ordine  $n$ , in due certi interni  $H$  e  $K$  di  $x_0$  e di  $y_0$  rispettivamente. Ed è anche lecito ritenere (limitando convenientemente questi interni  $H$  e  $K$ ) che, per ogni  $x$  compreso entro  $H$ ,  $y = u(x)$  cade entro  $K$ , e che reciprocamente  $x = v(y)$  resta compreso in  $H$ , al variare di  $y$  entro  $K$ .

Per essere  $u$  e  $v$  funzioni inverse, varranno poi le identità

$$(3) \quad \begin{cases} y = u \} v(y) \{, \\ x = v \} u(x) \{, \end{cases}$$

coll'ovvia limitazione che gli argomenti  $y$  ed  $x$  appartengano rispettivamente ai campi  $K$  ed  $H$ , in cui i secondi membri hanno effettivo significato.

2. Ciò premesso, prendiamo a considerare una funzione  $f$  della radice  $u(x)$  della (I), nell'ipotesi che  $f(u)$  sia, rispetto all'argomento  $u$ , finita e continua, assieme alle prime  $n$  derivate, per  $u = y_0$ , e in tutto l'intorno  $K$  di questo valore.

Se si tien conto che, al variare di  $x$  in  $H$ ,  $u(x)$  varia entro  $K$ , la  $f(u)$  si potrà anche riguardare come funzione di  $x$ , finita e continua, assieme alle sue prime  $n$  derivate, nell'intorno  $H$  di  $x_0$ .

Fissiamo un generico valore  $x$ , e poniamo

$$(4) \quad x_1 = v(x) = x + \varphi(x).$$

AmMESSO che  $x$  ed  $x_1$  appartengano entrambi ad  $H$ , potremo applicare alla funzione  $f\{u(x)\}$ , nell'intervallo, che va da  $x_1$  ad  $x$ , lo sviluppo abbreviato di Taylor, dell'ordine  $n - 1$ .

Calcoliamone i vari termini.

Anzitutto, attesa la definizione (4) di  $x_1$ , si ha

$$[f(u)]_{x=x_1} = f\{u(x_1)\} = f\{u(v(x))\},$$

ossia, per la prima delle identità (2),

$$(5) \quad [f(u)]_{x=x_1} = f(x).$$

Venendo alle derivate (si intende di un ordine  $m$  non superiore a quello, fin cui è stata supposta l'esistenza), partiamoci dalla identità

$$\left[ \frac{d^m f(u)}{dx^m} \right]_{x=x_1} = \frac{d^m}{dx_1^m} f\{u(x_1)\},$$

e badiamo che  $x_1$  è stato definito in termini di  $x$  mediante la (4). Come sopra,  $f\{u(x_1)\}$ , espressa per  $x$ , non è altro che  $f(x)$ .

D'altra parte

$$dx_1 = (1 + \varphi') dx,$$

sicchè derivare  $f(x)$ , rapporto ad  $x_1$ , equivale ad applicarle l'operazione differenziale

$$(6) \quad D_x = \frac{1}{1 + \varphi'} \frac{d}{dx}.$$

Risulta dunque

$$(7) \quad \left[ \frac{d^m f(u)}{dx^m} \right]_{x=x_1} = D_x^m f(x).$$

Dopo ciò lo sviluppo di  $f(u)$ , per potenze di  $x - x_1 = -\varphi(x)$ , può essere scritto

$$(II) \quad f(u) = f(x) + \sum_1^{n-1} m (-1)^m \frac{\varphi^m(x)}{m!} D_x^m f(x) + R_n,$$

il termine complementare  $R_n$  avendo l'espressione <sup>(1)</sup>

$$(8) \quad R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_1}^x (x - \xi)^{n-1} \frac{d^n f\{u(\xi)\}}{d\xi^n} d\xi,$$

ovvero quella di Lagrange

$$(8') \quad R_n = (-1)^n \frac{\varphi^n(x)}{n!} \left[ \frac{d^n f\{u(x)\}}{dx^n} \right]_{x=x_2},$$

in cui  $x_2$  rappresenta un qualche valore compreso fra  $x$  ed  $x_1$ .

<sup>(1)</sup> Cfr. per es. Arzelà, *Lezioni di calcolo infinitesimale* (Firenze, Le Monnier, 1901), pag. 352.



3. La (II) è la formula, cui ho alluso in principio.

Il termine generale di posto  $m^{\text{esimo}}$  ha l'espressione comodissima

$$(-1)^m \frac{\varphi^m(x)}{m!} D_x^m f(x).$$

Come si vede, esso dipende dalle derivate di  $f$  e di  $\varphi$  fino all'ordine  $m$ , e contiene  $\varphi^m$  a fattore.

È facile mettersi in condizioni, nelle quali quest'ultima circostanza equivale al requisito tipico dello sviluppo di Taylor: termine  $m^{\text{esimo}}$  d'ordine  $m$  (almeno) rispetto ad  $x - x_0$ .

All'uopo basta operare preventivamente nella equazione (I) una sostituzione lineare sulla variabile  $y$ , scambiando  $y$  in  $y - y_0 + x_0$ . L'equazione trasformata è ancora del tipo (I) e presenta la particolarità che il valore  $y_0$  di  $y$ , corrispondente ad  $x_0$ , coincide con  $x_0$  medesimo. La (I) stessa implica allora  $\varphi(x_0) = 0$ , e siccome  $\varphi$  è dotata, per ipotesi, di derivata finita, ne consegue che  $\varphi(x)$  è di prim'ordine almeno, rispetto alla differenza  $x - x_0$ .

Risulta così  $\varphi^m$  d'ordine  $\geq m$ , e con esso il termine  $m^{\text{esimo}}$  dello sviluppo (II). L'analogo termine della serie di Lagrange ha invece l'espressione

$$\frac{(-1)^m}{m!} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \{f'(x) \varphi^m(x)\}.$$

Quindi si eseguisce la derivazione indicata, rimane in generale a fattor comune soltanto la prima potenza di  $\varphi$ .

Si noti che, quando si assume la (I) sotto forma tale che  $y_0$  coincida con  $x_0$ , l'ipotesi complementare, richiesta per la validità dello sviluppo (II) (che cioè  $x_1 = x + \varphi(x)$  ed  $x$  appartengano contemporaneamente all'intorno  $H$ ), si trova senz'altro soddisfatta. Infatti, annullandosi  $\varphi(x)$  per  $x = x_0$ ,  $x_1$  tende ad  $x_0$  assieme ad  $x$ . Basta quindi prendere  $x$  abbastanza prossimo ad  $x_0$  per far sì che  $x_1$  ed  $x$  cadano entrambi in  $H$ .

Quanto al resto  $R_n$ , la (8') mette senz'altro in evidenza che esso è d'ordine  $\geq n$ .

La prima forma (8) merita invece interesse sotto altro punto di vista. In essa è precisata la dipendenza funzionale, mentre nella (8') compare la funzione  $x_2$ , di cui a priori si sa soltanto che ha valore numerico compreso fra  $x$  ed  $x_1$ .

Giova perciò ricorrere alla (8) quando per es. (ammessa, se occorre, l'esistenza di ulteriori derivate di  $\varphi$  e di  $f$ ) si abbia da derivare lo sviluppo (II) rispetto ad un qualche parametro.

#### 4. Estensione dello sviluppo.

Indicherò anche una estensione della (II).

Si tratta dello sviluppo di una funzione  $F(u, x)$ , che dipenda da  $x$ ,

non solo pel tramite di  $u$ , ma anche esplicitamente, e possegga del resto le proprietà qualitative, già ammesse per  $f(u)$ .

Ripetendo le considerazioni del n. 2, si accerta ovviamente che, al posto delle (5) e (7), valgono le relazioni:

$$[F(u, x)]_{x=x_1} = F(x, x_1) = F\{x, x + \varphi(x)\},$$

$$\left[ \frac{d^m F(u, x)}{dx^m} \right]_{x=x_1} = D_x^m F\{x, x + \varphi(x)\}.$$

Se ne ricava lo sviluppo cercato

$$(III) \quad \begin{aligned} F(u, x) &= F\{x, x + \varphi(x)\} + \\ &+ \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^m \frac{\varphi^m(x)}{m!} D_x^m F\{x, x + \varphi(x)\} + R_n, \end{aligned}$$

dove la forma di  $R_n$ , analoga alla (8), è

$$(9) \quad R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_1}^x (x - \xi)^{n-1} \frac{d^n}{d\xi^n} F\{u(\xi), \xi\} d\xi.$$

Anche qui basterebbe attribuirgli la forma di Lagrange per accertare che esso contiene  $\varphi^n$  a fattore.

*Sviluppi forniti dal metodo delle approssimazioni successive.*

5. Volendo risolvere la (I), rispetto ad  $y$ , per approssimazioni successive, la via più naturale sarebbe di porre

$$\begin{aligned} y_1 &= x, \\ y_2 &= x - \varphi(y_1), \end{aligned}$$

ecc.; in generale

$$y_{m+1} = x - \varphi(y_m) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Ma un tale procedimento non riesce sempre convergente: converrebbe introdurre l'ipotesi addizionale  $|\varphi'(x_0)| < 1$ .

6. Si evita ogni difficoltà col seguente artificio.

Operata, se occorre, quella tale sostituzione lineare, per cui riesce  $\varphi(x_0) = 0$ , scriviamo la (I) sotto la forma

$$y - x + \varphi(y) - \varphi(x) + \varphi(x) = 0,$$

e raccogliamo, nei primi quattro addendi,  $y - x$  a fattore.

Notando che la funzione

$$(10) \quad \psi(x, y) = 1 + \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}$$



resta finita e continua anche per  $y = x$ , e che, per  $x, y$  convergenti ad  $x_0$ , essa si avvicina al valore  $1 + \varphi'(x_0)$  [non nullo, per la disuguaglianza fondamentale (1)], possiamo anche dividere per  $\psi$ , ed avremo

$$(I') \quad y - x + \frac{\varphi(x)}{\psi(x, y)} = 0.$$

Definendo ora delle approssimazioni successive mediante le formule

$$(11) \quad y_1 = x,$$

$$(12) \quad y_{m+1} - x + \frac{\varphi(x)}{\psi(x, y_m)} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots),$$

queste risultano incondizionatamente convergenti in un conveniente intorno di  $x_0$ .

Per dimostrarlo, cominciamo collo scegliere, entro  $H$ , un intorno  $H_1$  tale che, per  $x, y$  compresi in  $H_1$ ,  $\psi(x, y)$  (che non si annulla per  $x = y = x_0$ ) si mantenga diversa da zero; anzi sia  $\frac{1}{|\psi(x, y)|}$  inferiore ad un numero positivo  $L$ .

Si dica poi  $M$  un limite superiore dei valori di  $|\varphi'(x)|$  entro  $H_1$ . Avremo

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq M|x - x_0|,$$

ossia, per essere  $\varphi(x_0) = 0$ ,

$$|\varphi(x)| \leq M|x - x_0|.$$

Scegliamo ancora un numero  $h$  abbastanza piccolo perchè il segmento

$$(1 + ML)h,$$

portato nei due versi, a partire da  $x_0$ , sia tutto interno ad  $H_1$ .

Con questa definizione di  $h$ , la disuguaglianza

$$(13) \quad |y - x_0| \leq (1 + ML)h$$

assicura che  $y$  è contenuto entro  $H_1$ .

Per brevità, introdurremo anche un terzo intorno  $H_2$  di  $x_0$ , di ampiezza non superiore ad  $h$ .

Siamo adesso in grado di accertare che, se  $x$  appartiene ad  $H_2$ ,  $y_2$  e così tutte le successive  $y_m$  cadono entro  $H_1$ .

Si osservi all'uopo che la prima delle (12), badando che  $y_1 = x$ , dà

$$y_2 - x_0 = x - x_0 - \frac{\varphi(x)}{\psi(x, x)},$$

donde, per le ipotesi fatte,

$$|y_2 - x_0| \leq (1 + ML)|x - x_0| \leq (1 + ML)h,$$

che è appunto la disuguaglianza (13), relativa ad  $y_2$ .



Per un'altra  $y$  qualunque, sia ad es. la  $y_{m+1}$ , basta supporre di aver fatta la verifica fino ad  $y_m$ , con che  $\frac{1}{|\psi(x, y_m)|}$  si può ritenere inferiore ad  $L$ . La corrispondente (12), scritta sotto la forma

$$y_{m+1} - x_0 = x - x_0 - \frac{\varphi(x)}{\psi(x, y_m)},$$

dà poi luogo alla disuguaglianza caratteristica

$$|y_{m+1} - x_0| \leq (1 + ML) h.$$

Sofferamoci un momento a stabilire una proprietà della  $\psi$ . Consideriamo perciò la differenza  $\varphi(x) - \varphi(z)$ , nell'ipotesi che  $x, z$  sia una coppia qualunque di valori, appartenenti ad  $H_1$ . Usufruento dello sviluppo abbreviato di Taylor del second'ordine, potremo scrivere

$$\varphi(x) - \varphi(z) = (x - z) \varphi'(z) + \frac{1}{2} (x - z)^2 \varphi''(\omega),$$

con  $\omega$  compreso fra  $z$  ed  $x$ , e quindi interno anch'esso ad  $H_1$ .

Si ha d'altra parte dalla (10)

$$\frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} = - \frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{(z - x)^2} + \frac{\varphi'(z)}{z - x},$$

donde, per confronto colla precedente,

$$(14) \quad \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} = \frac{1}{2} \varphi''(\omega).$$

Ciò posto, si sottragga da una generica (12) quella, che la precede. Si ha

$$y_{m+1} - y_m = - \frac{\varphi(x)}{\psi(x, y_m) \psi(x, y_{m-1})} \} \psi(x, y_m) - \psi(x, y_{m-1}) \{.$$

Per il teorema del valor medio, la differenza in parentesi può essere posta sotto la forma

$$(y_m - y_{m-1}) \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_{y=z_m},$$

dove  $z_m$  rappresenta un qualche valore appartenente ad  $H_1$  (perchè compreso fra  $y_m$  ed  $y_{m-1}$ ).

A norma della (14), applicata al valore  $z_m$  di  $z$ , si deduce

$$y_{m+1} - y_m = \frac{\varphi''(\omega_m)}{2\psi(x, y_m) \psi(x, y_{m-1})} \cdot \varphi(x) \cdot (y_m - y_{m-1})$$

$$(m = 2, 3, 4, \dots),$$

con  $\omega_m$  contenuto in  $H_1$ .

Ove si ponga

$$(15) \quad y_1 = x = \delta_0,$$

$$(16) \quad y_{m+1} - y_m = \delta_m \quad (m = 1, 2, \dots),$$

$$(17) \quad \frac{\varphi''(\omega_m)}{2\psi(x, y_m)\psi(x, y_{m-1})} = \tau_m \quad (m = 1, 2, \dots),$$

la formula, ora trovata, può essere scritta più semplicemente

$$(18) \quad \delta_m = \tau_m \cdot \varphi(x) \cdot \delta_{m-1} \quad (m = 2, 3, \dots),$$

mentre, avendo riguardo alla (11) o alla prima delle (12), la prima delle (16) porge

$$(19) \quad \delta_1 = \frac{\varphi(x)}{\psi(x, x)}.$$

Sostituiamo, in una (18) generica, per  $\delta_{m-1}$  l'analogo valore, e così successivamente, finchè si sia ricondotti a  $\delta_1$ , da sostituirsi a sua volta mediante l'espressione (19). Si ottiene

$$(18') \quad \delta_m = \frac{\tau_2 \cdot \tau_3 \dots \tau_m}{\psi(x, x)} \varphi^m(x) \quad (m = 2, 3, \dots).$$

Le (17) mostrano che, quanto a valore assoluto, nessuna  $\tau_m$  può superare il prodotto di  $\frac{L^2}{2}$  per il massimo valore di  $\varphi''$  entro  $H_1$ . Chiamando  $T$  questo prodotto, e tenendo presente che anche

$$\frac{1}{|\psi(x, x)|} \leq L,$$

le (17) e (18) somministrano in particolare la disuguaglianza

$$(19) \quad |\delta_m| \leq LT^{m-1} |\varphi(x)|^m \quad m = 1, 2, \dots.$$

Siccome  $\varphi(x)$  è zero per  $x = x_0$ , così esiste un intorno di  $x_0$ , entro cui il prodotto  $T|\varphi(x)|$  si mantiene minore dell'unità. Entro questo intorno, la serie di termine generale  $\delta_m$  converge colla rapidità di una progressione geometrica.

*La somma di tale serie non è altro che la funzione  $y = u(x)$ , definita dalla (I'), o, se si vuole, dalla (I).*

Sia infatti

$$(20) \quad u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m.$$

Per le (15) e (16), la somma dei primi  $n$  termini della serie vale  $y_n$ . Per la convergenza,

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = u(x);$$



dopo di che, con ovvio passaggio al limite, si ricava dalla (12)

$$u(x) - x + \frac{\varphi(x)}{\psi(x, u)} = 0.$$

c. d. d.

7. Per una generica funzione continua  $F(u, x)$ , si ha manifestamente, in causa della (21),

$$(22) \quad F(u, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n, x).$$

Ora, ponendo

$$(23) \quad g_0 = F(y_1, x) = F(x, x),$$

$$(24) \quad g_m = F(y_{m+1}, x) - F(y_m, x) \quad (m = 1, 2, \dots),$$

la somma  $g_0 + g_1 + \dots + g_{n-1}$  si riduce a  $F(y_n, x)$ , sicchè la (22) equivale a

$$(IV) \quad F(u, x) = \sum_0^{\infty} g_m.$$

Ammissa la derivabilità di  $F$ , si ha dalle (24) e (16)

$$(24') \quad g_m = \delta_m \left[ \frac{\partial F}{\partial u} \right]_{u=\eta_m} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

con  $\eta_m$  compreso fra  $y_{m+1}$  e  $y_m$ , e quindi appartenente al solito intorno  $H_1$ .

Se si indica con  $N$  il limite superiore dei valori assoluti di  $\frac{\partial F}{\partial u}$  al variare degli argomenti entro  $H_1$ , si ha in particolare dalla (24')

$$(24'') \quad |g_m| \leq N |\delta_m| \quad (m = 1, 2, \dots),$$

talchè lo sviluppo (IV) ha lo stesso comportamento della (20), rispetto alla convergenza.

8. Il metodo delle approssimazioni successive ci ha così fornito degli sviluppi, tanto per la radice  $u(x)$  della (I), quanto più generalmente per una qualunque  $F(u, x)$ . Dal punto di vista della validità e della convenienza numerica, questi sviluppi sono altrettanto, anzi più vantaggiosi di quelli differenziali, precedentemente costruiti.

Infatti  $\delta_m$  contiene a fattore  $\varphi^m(x)$ , e per conseguenza, quanto all'ordine dei termini, ci troviamo nelle stesse condizioni. Inoltre il calcolo effettivo riesce anche più spedito, e, per la validità del procedimento, basta largamente (come tosto apparisce dalle proprietà invocate nei nn. 6 e 7) che la funzione  $\varphi$  ammetta derivate continue dei primi due ordini, la  $F(u, x)$  derivata prima finita, rapporto ad  $u$ .

Gli sviluppi differenziali (II) e (III) esigono invece la esistenza di derivate d'ordine tanto più elevato, quanto più si procede nello sviluppo.

Con tutto ciò non viene meno il loro interesse, perchè i singoli termini (escluso, si intende, l'eventuale resto) dipendono dai valori di  $\varphi$ ,  $F$  (o, in particolare,  $f$ ) e loro derivate, *nel solo punto generico*  $x$ , che si vuol considerare.

Colle approssimazioni successive si fanno invece intervenire valori delle funzioni in punti, che sono in generale distribuiti *entro tutto un intervallo*, prossimo ad  $x$ , ma pur sempre finito. Si tratta dunque di sviluppi che, malgrado una maggiore semplicità, hanno carattere eminentemente funzionale.

Rimangono perciò preferibili gli sviluppi differenziali, quando si desidera raggiungere una certa approssimazione, riportandosi ad un unico punto.

### Fisica — *Comportamento dei vapori metallici nella scintilla elettrica.* Nota di A. BATTELLI e di L. MAGRI.

Le fotografie di scintille oscillatorie ottenute collo specchio girante, quando sono molto nitide, mostrano con grande evidenza che le immagini date dai vapori metallici staccati dagli elettrodi ad ogni mezza oscillazione non sono continue, ma solcate da strie più luminose, percorrenti la scintilla per la sua lunghezza, irregolarmente distribuite, più abbondanti nelle prime oscillazioni che nelle seguenti.

Il sig. G. A. Hemsalech, in una comunicazione all'Académie des Sciences dell'8 aprile u. s., ha presentato delle fotografie di scariche ottenute proiettando l'immagine d'una scintilla sopra una fenditura, e fotografando questa sopra una pellicola rapidamente rotante; ed ha notato egli pure che le immagini date dai vapori metallici che si staccano in ogni mezza oscillazione dagli elettrodi è discontinua. Da ciò egli ha concluso senz'altro dicendo che questo fatto è dovuto alla presenza, nella scarica, *di oscillazioni di ordine superiore (armonici)*, e che queste sono soprattutto marcate nella prima oscillazione. Ha soggiunto che manifestamente *gli armonici sono se non unicamente, in gran parte almeno la causa della luminosità del vapore nella scintilla.*

L'accurata osservazione del fenomeno, quale si presenta nelle numerose fotografie che noi da tempo abbiamo ottenuto, ci conduce a dare di tali discontinuità una spiegazione diversa da quella avanzata dall'Hemsalech.

Richiamiamo anzitutto l'attenzione su ciò che abbiamo detto altra volta <sup>(1)</sup> in riguardo alla costituzione della scarica stessa.

Lo stabilirsi della scarica è sempre accompagnato da una eccitazione luminosa dell'aria, che può essere più o meno notevole a seconda delle condizioni di esperienza. È noto che con periodi brevi l'esame spettroscopico

<sup>(1)</sup> Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XVI, p. 155, 10 febbraio 1907.



della scintilla mostra molto vivaci queste righe d'aria, che vanno mano mano indebolendosi nelle successive oscillazioni; con periodi molto lunghi questa luminosità dell'aria può praticamente ridursi ad una esilissima scintilla pilota.

Ciascuna mezza oscillazione stacca dagli elettrodi vapori metallici luminosi, che vengono *proiettati* nell'intervallo di scarica, sono luminosi in gran parte *per sè stessi e indipendentemente dall'oscillazioni*, restano luminosi anche quando l'intensità della scarica passa per lo zero, e possono, se sono molto abbondanti, essere lanciati e restare luminosi anche fuori dello spazio d'aria percorso dalla scarica.

Questi vapori luminosi non hanno la stessa ricchezza di radiazioni e lo stesso splendore nelle loro varie parti, in immediata vicinanza degli elettrodi emettono abbondantemente luce di un gran numero di lunghezze d'onda, e man mano che si allontanano dagli stessi elettrodi perdono una parte di queste vibrazioni e il loro spettro si semplifica. Tutto ciò spiega facilmente i punti luminosi in immediata vicinanza degli elettrodi e le righe lunghe e brevi che si osservano nello spettro della scintilla come conseguenza del moto di queste masse luminose e del tempo più o meno lungo per il quale esse possono conservare nel moto stesso le diverse specie di vibrazioni.

Tuttavia non intendiamo di escludere che quelle masse di vapore che si trovano sul passaggio della scarica non possano, per certe radiazioni almeno, esser rese e mantenute luminose dalle successive oscillazioni; ma è un fatto che alcune delle righe metalliche che si possono osservare nello spettro della scintilla *perdurano anche nei minimi della corrente e fuori dell'intervallo di scarica*, anche in luoghi dove la scarica non passa; le righe d'aria si hanno invece *nei massimi d'intensità soltanto*, e durano meno assai della durata di mezza oscillazione.

La luminosità dei vapori metallici non può dunque essere attribuita agli armonici, e non si può dire, come asserisce l'Hemselech, che la separazione dell'immagine dei vapori metallici in strie provi che il vapore resti luminoso soltanto durante il passaggio della corrente dovuta agli armonici. Queste strie provano solamente che la proiezione di masse di vapore dagli elettrodi non è regolare, ma quasi discontinua.

Quasi tutte le fotografie da noi ottenute con lo specchio girante mostrano evidentissimi questi fatti. Nella negativa riprodotta nella fig. 1 della nota citata si vedono molto chiaramente, nelle prime oscillazioni, delle righe luminose *continue* che vanno dall'uno all'altro elettrodo; le quali sono dovute all'aria, durano, come s'è detto, meno di mezza oscillazione, e vanno via via indebolendosi col progredire della scarica. Le curve che partono dagli elettrodi e arrivano verso il mezzo della scintilla, dove per un certo tempo quasi si arrestano, sono le traiettorie dei vapori luminosi.

Le curve dei vapori mostrano delle strie irregolarmente distribuite, muo-

ventisi talora in direzioni diverse, che fanno vedere chiaramente come esse non siano dovute nè al moto di una sola massa di vapore, nè ad un getto continuo di questo, ma piuttosto ad una proiezione irregolare e qualche volta intermittente.

Questa irregolarità è assai più pronunciata nelle prime oscillazioni quando l'intensità della scarica è più grande e gli elettrodi sono più freddi, e può dipendere da numerose cause accidentali, alle quali potranno anche aggiungersi, in quei casi in cui l'intensità della scarica non è la stessa allo stesso istante in tutti i punti del circuito, le vibrazioni di ordine superiore previste dal Kirchhoff, che sono però ben diverse dagli *armonici della oscillazione fondamentale* che ha creduto di vedere l'Hemsalech.

Questi particolari però, *nettissimi nelle negative*, si vedono male in clichés in zinco e non si vedono affatto nelle copie tirate; non abbiamo



quindi potuto stamparle. Abbiamo invece cercato di far eseguire il meglio che fosse possibile una incisione in legno da una buona negativa ottenuta senza fenditura con una scarica di periodo lento ( $\tau = 0,00005$ ). In essa (v. figura) si vedono bene le traiettorie dei vapori metallici; le righe d'aria si sono ridotte alla esilissima scintilla pilota.

Abbiamo voluto eseguire qualche fotografia nel modo indicato dall'Hemsalech, ossia proiettando l'immagine della scintilla sopra una fenditura ad essa parallela e fotografandola con lo specchio rotante. In questo modo non abbiamo ottenuto nulla di più di quello che possiamo osservare sulle nostre fotografie dirette: si vedono al solito le strie irregolarmente distribuite, ma si seguono peggio le masse di vapore nelle loro traiettorie.

Abbiamo posto in seguito la scintilla normalmente alla fenditura e abbiamo potuto accertare che i tratti luminosi corrispondenti ad ogni mezza oscillazione non sono discontinui, come vorrebbe l'ipotesi dell'Hemsalech, ma piuttosto di splendore irregolare, con questo poi di notevole che il più delle volte non si ha un solo tratto luminoso per ogni mezza oscillazione, ma talora due o tre quasi paralleli fra loro: ciò che ci dimostra come questi proiettili luminosi siano press'a poco indipendenti nel loro movimento, tanto che alla fenditura, nella stessa mezza oscillazione, possono arrivare in punti diversi e contemporaneamente più d'uno di questi getti di vapore.



Dunque dallo stesso elettrodo possono partire contemporaneamente, e in varie direzioni, più getti luminosi; se la scarica è assai intensa, queste particelle possono essere lanciate allo stesso istante da punti diversi dell'elettrodo stesso. La scintilla poi si muove continuamente alla superficie di questo e rende così più irregolare il fenomeno.

Tutto ciò che abbiamo brevemente riassunto, è visibile con molta chiarezza nelle nostre negative. Disgraziatamente, per la sottigliezza dei particolari, non è stato possibile farne una riproduzione in zincotipia.

Il comportamento dei vapori metallici ed il meccanismo della scintilla richiedono ancora lunghi e pazienti studi. Noi da un pezzo stiamo facendo delle accurate indagini su questo argomento e speriamo di poter presto render conto dei risultati che abbiamo già in parte ottenuti dalle nostre ricerche spettroscopiche.

**Geologia.** — *Il Neck subetneo di Motta S. Anastasia.* Nota del Corrispondente GIUSEPPE DE LORENZO.

L'Etna, com'è noto, non sorge con la sua radice ed i suoi fianchi direttamente dal mare, ma s'appoggia e si stende sopra una base sedimentaria, disposta a guisa d'una grande piattaforma inclinata, che da più di 1100 metri, raggiunti a nord-ovest dalle arenarie mioceniche di Maletto, discende a sud-est fino a circa 300 m. sul mare, occupando un'area ellittica, di cui l'asse maggiore, diretto da nord-nord-ovest a sud-sud-est, è lungo poco più di 35 chilometri e l'asse minore circa 30 chilometri. I prodotti eruttivi frammentari e le correnti laviche dell'Etna si spandono e si allungano oltre i limiti di tale piattaforma sedimentaria, occupando una più vasta area.

Alla natura di questa base sedimentaria dell'Etna ho accennato nella mia Nota su *Le basi dei vulcani Vulture ed Etna* (Comptes-Rendus du X<sup>e</sup> Congrès Géologique International, México, 1906), mostrando come essa sia costituita da una grande conca di rocce mesozoiche e di Flysch eo-miocenico, formatasi nel corrugamento orogenico post-eocenico, modellata dall'erosione ed abrasione post-miocenica e riempita poi dai sedimenti marini della transgressione pliocenica superiore e pleistocenica, coperti a loro volta dal diluvium quaternario, col quale e sul quale poi è sorto l'Etna.

Questi depositi postpliocenici subetnei negli ultimi anni sono stati oggetto di studi accurati da parte del mio attuale assistente, dott. S. Scalia, che recentemente ha raccolto le sue antiche e le nuove osservazioni in una Memoria conclusiva: *Il Postpliocene dell'Etna* (Atti dell'Acc. Gioenia di Sc. Nat., ser. 4<sup>a</sup>, vol. XX, Catania 1907); in cui egli descrive, come tali depositi, costituiti essenzialmente da argille ed argille sabbiose marine, appaiono a la Vena, sopra Piedimonte Etneo, a circa 800 m. sul mare, tras-

paiono qua e là tra le lave o sono svelati dalle sorgenti d'acqua lungo le falde orientali dell'Etna, si stendono ampiamente lungo le falde meridionali, tra la regione degli Aci e Paternò, dove sono coperti dai conglomerati diluviali delle Terre Forti, e risalgono poi lungo le falde occidentali verso Biancavilla ed Adernò, finchè finiscono con lo sparire sotto la mole del vulcano. Le argille sabbiose hanno dato una ricca fauna marina di 375 specie, di cui solo 7 sono estinte e nessuna è veramente nordica, ma tutte sono ancora viventi a varie profondità del mare attuale. I conglomerati fluviali delle Terre Forti, che già contengono ceneri e ciottoli delle prime eruzioni etnee, hanno dato anzi, ricordati da Lyell, di mammiferi scomparsi da questi luoghi od estinti, come l'*Hippopotamus maior* e l'*Elephas antiquus*.

L'affioramento più esteso e visibile dei depositi postpliocenici subetnei è quello che si svolge lungo le falde meridionali del vulcano. Quivi esso, visto dal mare a sud di Catania, si presenta come una lunga terrazza, che comincia ad oriente nelle alture del Monte d'Oro, a 377 m. sul mare, prosegue verso occidente nelle Tempe della Catira, a circa 350 m., passa sopra gli scaglioni tufacei della Licatia e del Fasano e si stende fino alle Terre Forti di Misterbianco ed alle Siele di Motta S. Anastasia, quivi culminando nel M. Tiriti a 324 m. sul mare. Sopra questa terrazza ben definita si erge il cono dell'Etna, il quale però ha spinto le sue correnti laviche fino a traboccare dall'orlo della terrazza, per scendere al mare: nascondendo così in parte la costituzione della base sedimentaria, che viene ad essere accennata dalla sola linea esteriore. La quale probabilmente rappresenta una vera linea di emersione, un poco anteriore all'altra linea di spiaggia segnata dai tufi e dai conglomerati del Fasano e della Licatia. Nella parte più bassa di quel piano postpliocenico emerso vennero a riversarsi le alluvioni, che portavano dai Nebrodi e dalle Caronie al mare i ciottoli di rocce cristalline antiche, di calcari mesozoici e, più di tutti, di arenarie, marne, breccie nummulitiche ed altri materiali del Flysch eo-miocenico, che ora costituiscono i conglomerati delle Terre Forti. In questi conglomerati, come s'è detto, si trovano anche le ceneri ed i ciottoli basaltici, derivanti dalle prime eruzioni etnee, scoppiate in quella vasta valle post-pliocenica e rimaste poi seppel-lite sotto i prodotti delle ulteriori eruzioni, con cui a poco a poco s'è formato il gigantesco vulcano.

Ma non soltanto le prime eruzioni dell'Etna propriamente detto scoppiarono in quella piana quaternaria. Nella parte di essa più meridionale e più prossima al mare, che ora ci è rappresentata dalla su descritta terrazza, sorsero numerosi piccoli vulcani, simili in certo modo a quelli che ora sono sparsi sulle spalle stesse dell'Etna, ma indipendenti, almeno nelle loro esterne manifestazioni, dal focolare principale del grande finitimo vulcano: simili in ciò al vulcano preistorico o protostorico di Mojo. Ma, mentre questo vulcanetto dalla parte settentrionale dell'Etna ci è rimasto quasi integral-



mente conservato, dei vulcanetti meridionali invece, più antichi e più esposti agli acquiferi venti del sud, non ci restano che pochi avanzi risparmiati dall'erosione. Di tali avanzi i più noti e vistosi sono dati dagli scogli e dalle rupi basaltiche dei Ciclopi, di Aci Castello, di Motta S. Anastasia e di Paternò. Ma, oltre di essi e nello spazio tra essi compreso vi sono, benchè ignorati e non segnati sulle carte, numerosi filoni e scogli basaltici, che affiorano un po' da per tutto tra i campi, attraverso le argille ed i conglomerati postpliocenici, e che hanno un'origine similè a quella delle su ricordate rupi maggiori. Tutte queste scogliere basaltiche infatti non tanto rassomigliano agli embrioni di vulcani della Svezia od ai Maare dell'Eifel, quanto ai *necks* della Scozia, così splendidamente illustrati da sir Archibald Geikie. Al pari di quelli infatti, questi avanzi di vulcani subetnei non sono



FIG. 1. — *B.* Base sedimentaria. — *E.* Materiali eruttivi, frammentari e lavici, dell'Etna.  
— *N.* Necks subetnei. — *M-M.* Livello attuale del mare.

che le estremità terminali dei camini eruttivi, riempiti di materiali frammentarii e lavici, messe a nudo dalla erosione, che ha in tutto od in parte asportato i con i e tutti gli apparati vulcanici esteriori. Alcune volte, come nella rupe di Paternò, esiste ancora buona parte del cuore del cono eruttivo esterno; altre volte invece non v'è che il camino, o nuca, o radice del vulcano, riempita da lava basaltica. In certi casi, come negli scogli dei Ciclopi, forse la lava non giunse a sboccare alla superficie e rimase sotto le argille postplioceniche, in cui s'iniettò con numerosi filoncelli, dando origine anche ad un primo grado di metamorfismo di contatto. Ma nella maggior parte dei casi il magma eruppe alla superficie sotto le sue diverse forme frammentarie e laviche, come c'è per esempio provato dal bellissimo neck di Motta S. Anastasia.

La rupe, su cui sorge Motta S. Anastasia, già da lontano attira l'attenzione per la sua massa di color ferrigno, che s'eleva bruscamente con balze di 50 metri d'altezza sulle ondulazioni argillose delle Siele, raggiungendo i 275 m. sul mare. E già infatti Goethe, nel passarvi il 1 maggio 1787, ne aveva riconosciuto la bellezza e l'importanza: « Motta ist ein schöner bedeutender Fels ». Egli è il primo, ch'io sappia, che abbia richiamato l'attenzione sulla nostra rupe. Prima di lui, nel 1768, era stato in questi luoghi Hamilton, il quale però era solamente e tutto inteso alla costruzione e genesi dell'Etna, che comprese così bene, da poter poi, a pag. 81 dei suoi *Campi Phlegraei*, Napoli 1776, affrontare Buffon, scrivendo, che

il gigantesco Etna s'è così evidentemente formato per una serie di eruzioni od esplosioni vulcaniche, nel corso lunghissimo delle rivoluzioni dei tempi, come il Monte Nuovo presso Pozzuoli si formò per una sola eruzione, nel brevissimo spazio di 48 ore. Circa un secolo dopo vediamo un altro grande inglese, Carlo Lyell, sostenere lo stesso principio contro le affermazioni del maggiore illustratore dell'Etna, Sartorius von Waltershausen, che invocò di nuovo il sollevamento per la genesi della parte centrale di questo vulcano. Ma, tornando alla rupe di Motta S. Anastasia, questa, dopo l'osservazione di Goethe, si trova esplicitamente nominata a pag. 457 del *Mémoire sur les Iles Ponces et Catalogue raisonné des produits de l'Etna*, Paris 1788, del cav. D. de Dolomieu, il quale ne descrisse le grandi colonne prismatiche verticali, formate di compattissima lava. In quel tempo faceva osservazioni sui dintorni di Catania il canonico Recupero: ma la sua *Storia naturale e generale dell'Etna*, pubblicata a Catania nel 1815 dal nipote Agatino Recupero, nulla contiene di notevole su Motta, tranne nella nota 4, in cui il nipote giustamente paragona la rupe della Motta a quelle di Paternò, Aci Castello, Ciclopi ecc., riconoscendo, che si tratta di vulcani, i quali eruttarono materiali frammentari e lavici e di cui i crateri furono distrutti dal tempo. Non diversamente si espresse Francesco Ferrara nella sua *Descrizione dell'Etna*, Palermo 1818, aggiungendo però a torto, che le argille avevano ricoperto il vulcano e che questo era poi venuto fuori per denudazione. Il Ferrara pochi anni prima (Messina 1810) aveva pubblicato un lavoro su *I campi Flegrei della Sicilia*, in cui erano espresse sulla formazione della Sicilia e sugli sprofondamenti nel mar Tirreno ed Africano vedute non molto dissimili da quelle recentemente esposte da Suess.

Con ciò si giunge al periodo degli studi analitici sulla geologia di queste regioni. Il primo ad aprire questa nuova serie fu Fr. Hoffmann nelle sue *Geognostische Beobachtungen gesammelt auf einer Reise durch Italien und Sicilien in den Jahren 1830 bis 1832*, pubblicate poi da von Dechen a Berlino nel 1839. In questo volume si trova una grande quantità di osservazioni coscienziuose, minute, esatte; manca però uno sguardo geologico profondo, che le unisca in un quadro completo e vivente. Così per la rupe di Motta egli distingue la parte scoriacea superficiale da quella interna compatta e descrive il conglomerato basaltico a nord-est ed ovest, ma non si ferma a considerare i rapporti tettonici di essi tra di loro e con le rocce sedimentarie circostanti. Ma lo sguardo profondo, che mancava a lui ed agli altri, l'ebbe invece Lyell, che nel suo classico lavoro *On the Structure of Lavas which have consolidated on steep slopes; with Remarks on the Mode of Origin of Mount Etna, and on the Theory of "Craters of Elevation"* (Philos. Transactions of Roy. Soc. of London, 1858) diede del nostro grande vulcano una descrizione, che non è stata poi più superata, nè tampoco eguagliata. Per l'argomento, che ora ci occupa, egli chiaramente mostrò,

come alla Motta ed a Paternò, nell'area dell'antico estuario subetneo, si trovano interessantissimi monumenti di eruzioni vulcaniche locali, posteriori al grande alluvium, di cui hanno incorporato i ciottoli, involuppendoli nei tufi e nella lava e spesso bruciandoli ed alterandoli. Esse furono probabilmente coeve delle prime eruzioni subaeree del cono dell'Etna e, dopo che esse eruppero attraverso le argille ed i conglomerati postpliocenici, non altri mutamenti avvennero in quella regione, tranne quelli dovuti alla denudazione fluviale, che, asportando una parte delle rocce vulcaniche e delle sedimentarie, ci ha messi in grado di comprendere le relazioni delle une colle altre, mostrandoci come le materie fuse sono semplicemente ascese attraverso camini, ora rappresentati da dicchi, senza produrre alcuna dislocazione nelle rocce, attraverso cui sono passate.

Quando Lyell scrisse il suo lavoro, già si trovava qui a studiare il vulcano Sartorius von Waltershausen, la cui grande monografia *Der Aetna* fu poi pubblicata a Lipsia nel 1880 da A. von Lasaulx. Ma questi era specialmente chimico-mineralista, come il Sartorius era prevalentemente topografo: così che la monografia costituisce un'eccellente descrizione topografica e mineralogica dell'Etna, corredata di carte e di illustrazioni magnifiche, ma è difettosa dal lato geologico; e sotto questo aspetto, specialmente per la comprensione della tettonica e della genesi del vulcano, resta, a mio parere, inferiore all'antico lavoro di Lyell. Di questo difetto si ha prova, p. es., anche nella singola descrizione (vol. II, pag. 48 segg.) della rupe di Motta S. Anastasia, di cui non sono con chiarezza viste nè indicate le condizioni tettoniche e genetiche, fino al punto da concludere (id., pag. 52), che le rocce di Paternò e della Motta sembrano non appartenere alle eruzioni dell'Etna, ma' si debbono probabilmente, come quelle dei Ciclopi, assegnare al gruppo vulcanico della Valle di Noto. Ora, tutte le formazioni vulcaniche della Val di Noto, come aveva già osservato Dolomieu, costituiscono un gruppo eruttivo speciale, anteriore e diverso da quello etneo e subetneo. Là infatti le eruzioni di ceneri e di lave basaltiche ebbero luogo in prevalenza durante il sollevamento postmiocenico e furono forse generalmente sottomarine, o per lo meno i loro prodotti tornarono a più riprese sotto il mare durante le diverse fasi della subsidenza o transgressione pliocenica superiore e pleistocenica inferiore; in modo che i depositi di quel mare si intercalarono nelle formazioni eruttive e le coprirono con lenti, scogliere e stratificazioni di calcari fossiliferi, che seguirono l'andamento delle forme eruttive preesistenti. L'abrasione del mare pliocenico superiore e la denudazione postpliocenica hanno in gran parte spianato, distrutto ed alterato l'edificio originario; di cui si hanno però ancora quasi i capisaldi nei grandi centri eruttivi dei monti Lauro, S. Venere ed Altore, che sovrastano le inferiori pendici di lave e tufi basaltici: coperte qua e là da chiazze di banchi calcarei, che si fanno più spessi e potenti e continui a misura che si scende



verso la periferia del gruppo e mostrano, che già al principio del Pleistocene s'erano completamente estinte le manifestazioni eruttive della Val di Noto.

Invece proprio col Pleistocene, come innanzi s'è detto, ebbero principio le eruzioni subetnee, come quelle di Motta e di Paternò, le quali attraversarono non solo i sedimenti marini postpliocenici, ma anche i conglomerati del Diluvium. Ciò si vede splendidamente tanto nella rupe di Paternò, di cui mi occuperò un'altra volta, quanto in quella di Motta, di cui ora dò qualche cenno.

La rupe di Motta S. Anastasia sorge dai circostanti sedimenti come un cilindro di poco più di 300 metri di diametro. A nord tale cilindro si stacca per una ventina di metri d'altezza appena dai declivii di conglomerati diluviali ed argille sabbiose, che scendono dal monte Tiritì; ma a sud e ad est le sue pareti brune si elevano per più di 40 metri ripidamente dalla morbida collina argillosa, che ne circonda il piede e scende dolcemente verso la valle. Nei fianchi di questa collina rivolti a sud-est, sopra una linea non più lunga di 300 metri dalla rupe di Motta fino alla sponda destra del ruscello si elevano dalle argille altri spuntoni di lava, eguali a quella della rupe ed indizî, forse, di altre brevi eruzioni laterali dell'antico vulcanetto della Motta.

Di questo ora non rimangono nella rupe maggiore che i residui dei suoi prodotti frammentari e lavici. I prodotti frammentari si trovano, in scarsa misura, specialmente nel fianco orientale ed in quello nord-est della rupe: rappresentati da strati di tufi basaltici, principalmente costituiti da ceneri e lapilli, insieme impastati ed indurati e cementati da un inizio di alterazione palagonitica, simile a quella, che in maggiore misura si trova poi nella rupe di Aci Castello e nei basalti di Val di Noto. Tranne questa incipiente alterazione i conglomerati della rupe di Motta non differiscono essenzialmente, p. es., dagli strati di ceneri e lapilli, impastati in tufo, che costituiscono la cima occidentale e più alta dei Monti Rossi; solo che questi, corrispondentemente alla natura doleritica di quella eruzione del 1669 e della maggior parte delle eruzioni etnee, sono gremiti di bei cristalli appariscenti di plagioclasio ed augite, mentre quelli ne sono privi, in conformità della struttura anamesitica della roccia con cui sono connessi. Ma la caratteristica principale dei tufi basaltici della Motta è data dalla grande quantità di frammenti di rocce estranee, che sono impastati tra le ceneri ed i lapilli di costituzione originaria. Tali frammenti estranei sono principalmente rappresentati da pezzi e brandelli di argille ed argille sabbiose, nonchè da ciottoli di arenarie, di rocce silicee e silicate, di marne, di galestri, di calcari e perfino di calcari nummulitici. Questi ciottoli corrispondono perfettamente a quelli dei circostanti conglomerati diluviali delle Terre Forti, come i frammenti di argille sono eguali alle contigue argille delle Siele.

È quindi chiaro, che le prime esplosioni iniziali della Motta insieme con le ceneri ed i lapilli del magma basaltico autigeno lanciarono in aria anche i frammenti delle argille postplioceniche e dei conglomerati quaternari, attraverso cui esse erano scoppiate. La mistione degli uni e degli altri venne a costituire i tufi del cono eruttivo esterno, di cui i descritti conglomerati ci rappresentano gli ultimi avanzi. Il fatto, che i blocchi rigettati allotigeni sono quasi intatti, dimostra che le esplosioni iniziali furono poco profonde e poco violente, in modo che non potettero rigettare frammenti di materiali già metamorfosati dall'azione del magma sotterraneo. Potrebbero anche dire, che questo non ebbe, in profondo, tempo ed agenti mineralizzatori sufficienti per produrre tale metamorfosi. Così, p. es., nei necks delle isole dei Ciclopi, il magma basaltico, salito fino a poca distanza dalla su-

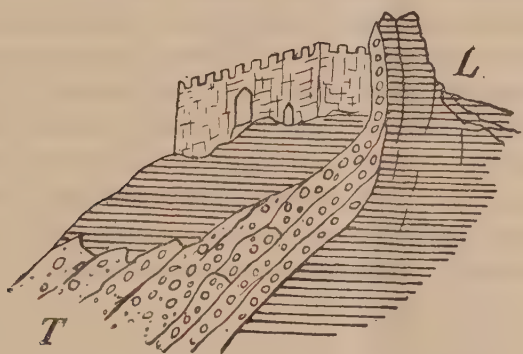


FIG. 2. — Fianco nord-est della rupe di Motta.

*L.* Lave basaltiche. — *T.* Breccie e tufi basaltici con elementi allotigeni, spinti e curvati dalla colonna di lava.

perficie, ebbe la forza di mandare iniezioni nelle argille soprastanti, ma non ebbe tanta quantità e tensione di vapore e di gas, che gli permettessero di esplodere e di erompere all'esterno con forme frammentarie e laviche. Invece nel vulcano di Paternò le esplosioni furono più forti e profonde; il materiale frammentario autigeno è più grosso e vario di quello della Motta, essendo anche ricco di scorie e bombe; ed il materiale allotigeno presenta già un primo grado di metamorfismo nei grandi pezzi di argille arrossati e cotti dall'intensa azione eruttiva. La Motta quindi presenta quasi un tipo di genesi intermedio tra i Ciclopi e Paternò.

Naturalmente l'energia eruttiva anche del vulcanetto della Motta era concentrata nell'estremità superiore della colonna lavica, la quale, quando s'ebbe con le prime esplosioni aperto il passaggio, ascese anch'essa fino ad occupare il fondo del cratere esterno, ma senza forse traboccare e dilungarsi lontano sotto forma di corrente lavica. In questa sua ascesa la colonna lavica centrale dovè forse scostare e spingere gli strati di materiali fram-

mentarî, che già s'erano disposti in quel punto con pendenza periclinale interna verso il camino eruttivo. E così ora noi troviamo nei fianchi est e nord-est gli strati di tufi basaltici innalzati e curvati lungo la faccia del cilindro di basalto, come si può scorgere sullo schizzo della fig. 2. Ma, mentre la colonna lavica dimorava così al fondo del cratere e con le sue proiezioni di ceneri e lapilli aumentava la massa del materiale frammentario del cono esterno, dall'interno di essa si partivano sottili lingue di lava, che s'insinuavano tra gli strati di tufo e ne attraversavano la compagine, senza neanche esse fuoriuscire all'esterno, ma raffreddandosi e solidificandosi sotto le forme di sottili dicchi e filoni scuri, con cui ora noi li possiamo osservare nei tufi della parte orientale e grecale della rupe.

Questi filoni scuri, che dallo spessore di qualche centimetro arrivano fino a parecchi decimetri, hanno un aspetto alquanto diverso da quello della grande massa lavica della rupe e rassomigliano petrograficamente alla parte superiore scoriacea della rupe stessa, che alla superficie accenna a risolversi in un ammasso di scorie bollose, nere o rossastre. Al pari di queste i filoni sono costituiti da una roccia scura, quasi nera, a frattura concoide, con aspetto omogeneo, in cui a gran pena riesce a distinguersi qualche grano di olivina, e che quindi ha l'apparenza tipica del basalto. Invece la roccia della grande massa della rupe e degli spuntoni sottostanti, come aveva già riconosciuto il Lasaulx, che ne diede la seguente analisi:

Si O <sub>2</sub> . . . . .	47,63	
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . .	14,78	
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . .	8,32	
Fe O . . . . .	5,03	
Mg O . . . . .	5,43	
Ca O . . . . .	10,52	P. sp. 2,85
Na <sub>2</sub> O } . . . . .	6,31	
K <sub>2</sub> O } . . . . .		
H <sub>2</sub> O . . . . .	1,41	
CO <sub>2</sub> . . . . .	0,36	
PO <sub>5</sub> . . . . .	tracce	
	99,79	

ha un colore grigio verdiccio e fa riconoscere ad occhio nudo la sua struttura granulare, quantunque non sia facile discernerne i componenti, tranne nelle parti più alterate, in cui l'olivina comparisce come minuta punteggiatura giallastra: questa roccia quindi ha l'aspetto tipico dell'anamesite. Al microscopio il basalto dei filoncelli e delle scorie mostra una struttura ipocristallina porfirica, alquanto diversa da quella ipidiomorfa granulare dell'anamesite; ma in questa ed in quello abbondano i cristalli di plagioclasio coi caratteri della labradorite, che mostrano di essersi cominciati a segregare



ed a cristallizzare prima dell'augite, anch'essa però abbondante. Anteriori ad entrambi appaiono i piccoli grani neri di magnetite, numerosissimi nel basalto dei filoni, e quelli abbondantissimi e verdi dell'olivina, con la caratteristica alterazione in sostanze cloritiche, associate a volte con neoproduzioni di calcite ed aragonite. Mancano invece le zeoliti, che sono così abbondanti nello scoglio grande dei Ciclopi. I rapporti strutturali della roccia sono inalterati anche quando la roccia stessa è alla superficie rivestita dalla caratteristica scorza gialliccia d'alterazione, a cui nell'interno non corrisponde che l'alterazione dell'olivina; mentre i cristalli di feldspato, a struttura compatta, non zonata, e quelli di augite, ricchi di numerose inclusioni, sono rimasti quasi intatti. Tutte queste condizioni tendono a mostrare, che la roccia di Motta S. Anastasia dopo la sua formazione è stata relativamente poco soggetta ad alterazioni, sia per parte di esalazioni gassose o di acque termali provenienti dall'interno, che per infiltrazione di acque esteriori. E ciò va d'accordo con la storia geologica, recente e breve, del piccolo vulcano.

Alle differenze microscopiche corrispondono assai più rilevanti differenze macroscopiche delle forme di consolidamento. I basalti feldspatici neri dei filoni sottili e della parte superficiale si sono consolidati senza dare una struttura regolare, ma solamente scomponendosi in frammenti irregolari o producendo scorie bollose e vescicolari. Invece la grande massa interna anamesitica ha assunto la tipica struttura prismatica, suddividendosi in grandi colonne esagone ed ettagone, di più di mezzo metro di diametro e di oltre dieci metri d'altezza, che si vedono splendidamente sviluppate alla base del piano orientale della rupe. A nord-est invece si ha un inizio di scomposizione sferoidale, corrispondente ad un lato meno nucleare della massa lavica. Dolomieu nel suo studio sull'Etna era giunto alla conclusione, che tutte le lave a struttura colonnare, che si trovano lungo il perimetro del vulcano, fossero di origine subacquea. Ora si sa invece, che anche i filoni intratellurici di basalti hanno la stessa struttura. A me pare, che per l'origine della segmentazione prismatica sia necessario un raffreddamento ed un consolidamento lento, i quali sono naturalmente favoriti dalla pressione. Una corrente di lava, che si versa all'aperto ed in strati sottili, si raffredda e s'evapora rapidamente e ha quindi una grossa superficie scoriacea, con un sottile strato compatto interno. Ma se la corrente è molto alta, allora la pressione della crosta raffreddata favorisce il lento raffreddamento e consolidamento della parte centrale, che assume una struttura poliedrica. E se la pressione dell'acqua (nelle correnti subacquee) e della terra (nei filoni e nei necks) si aggiunge a quella della superficie di raffreddamento, allora aumentano ancora le condizioni favorevoli allo sviluppo della segmentazione poliedrica. Perciò alla periferia dell'Etna si osserva già una struttura colonnare, sebbene imperfetta, nelle lave subaeree, come quella del 1669, quando si sono ammassate per grande altezza nelle parti basse e piane; ma più distinta tale struttura si

osserva quando le lave stesse sono scese fino al mare, come nella famosa costa dell'ora scomparsa Grotta delle Palombe sotto Acireale; o quando si sono consolidate sotterra, come in tutti i necks basaltici, che dalle isole dei Ciclopi e da Aci Castello vanno fino a Motta S. Anastasia e Paternò. Di solito le colonne prismatiche sono disposte, come si sa, perpendicolarmente alla superficie di raffreddamento: e quindi nelle correnti laviche sono verticali, mentre nei filoni sono disposti orizzontalmente, come cataste di legna. Di tali cataste di filoni orizzontali se ne vedono presso Aci Castello, dove corrispondono a filoni verticali. Quando i filoni sono più grossi, allora le colonne assumono un aspetto raggiato, partendo da un asse centrale e raggiungendo verso la superficie del filone. Ma, allorchè le masse laviche sono conside-

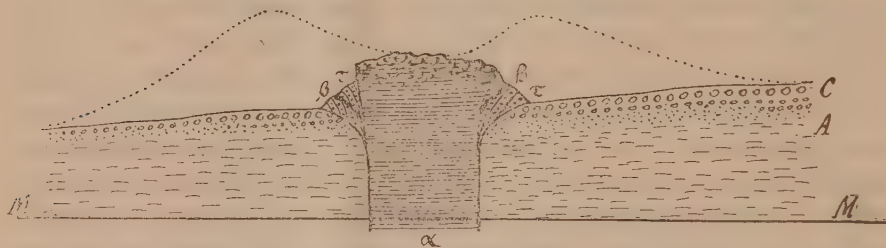


FIG. 3. — A. Argille sabbiose marine postplioceniche. — C. Conglomerati diluviali. — α. Anamesite a struttura colonnare. — β. Filoncelli di basalto feldspatico. — τ. Tufi e breccie basaltiche con elementi delle argille e dei conglomerati circostanti. — M.M. Livello attuale del mare. — La linea punteggiata indica l'eventuale profilo dell'antico cono eruttivo.

revoli, come nel faraglione alto dei Ciclopi o nella rupe della Motta, allora la superficie di raffreddamento è più esteriore che laterale, e quindi la parte superiore della colonna lavica si scompone sferoidalmente ed in poliedri sferoidali, che poi verso il basso si sommano e si fondono, formando colonne prismatiche verticali o quasi, come quelle della Motta..

La decomposizione poliedrica, offrendo con le sue numerose superficie di distacco facile accesso alle acque, all'azione del gelo ed alla penetrazione di organismi vegetali ed animali, facilita l'opera alla denudazione, che ha già scoperto il cuore dell'antico cono vulcanico e tende a distruggerlo completamente. Dalla presenza dei conglomerati basaltici, dianzi descritti, nella parte orientale e settentrionale della rupe e dall'analogia con gli altri simili vulcani, come quelli di Paternò, noi possiamo indurre, che il vulcanetto di Motta doveva in origine avere un piccolo cono craterico esterno, formato di materiali frammentari, non molto dissimile da quelli, che ora sono sparsi a centinaia sulle spalle dell'Etna. Il fondo del cratere di tale cono era occupato dalle scorie della parte terminale della colonna lavica, le quali ora si trovano al sommo della rupe, che rappresenta il camino eruttivo, pieno

di lava consolidatasi dopo l'eruzione. Dalla colonna lavica centrale partivano piccoli filoni basaltici, che s'insinuavano come lingue e filamenti sottili nei conglomerati dei fianchi del cono, e di cui ancora alcuni sono visibili. Poi che i fuochi eruttivi furono spenti, la denudazione aerea, specialmente per opera delle acque portate dai venti di scirocco-levante, attaccò il piccolo vulcano. Il cono, formato di materiali facilmente disgregabili, fu rapidamente demolito, fino a giungere al nucleo roccioso. Le argille circostanti e sottostanti furono anch'esse erose e lavate, e franando misero a nudo altri spuntoni di lava, erompenti a sud-est del camino eruttivo centrale di Motta. L'opera di denudazione, cominciata forse quando il grande cono dell'Etna era ai principi della sua enorme costruzione, ha proseguito durante tutta l'opera di formazione di quello ed è giunta ora, sempre erodendo e consumando, a mettere quasi a nudo il cuore del piccolo, già da tempo estinto vulcano subetneo.

**Fisica terrestre. — *L'Osservatorio Etneo in rapporto al servizio meteorologico.*** Relazione del Corrispondente A. Riccò.

Mentre ho l'onore di presentare all'Accademia il riassunto di un secondo saggio di meteorologia della cima dell'Etna <sup>(1)</sup>, la cui esecuzione ho affidata ai sigg. dottori L. Mendola e F. Eredia, già assistenti nell'Osservatorio, credo opportuno di informare l'Accademia delle condizioni affatto speciali, sotto diversi riguardi, nelle quali si compie lassù il servizio meteorico.

*Posizione.* — L'Osservatorio Etneo (centro della grande cupola) ha le seguenti coordinate geografiche, determinate dal R. Istituto Geografico Militare nel 1897.

Latitudine boreale	37° 44' 17" 23
Longitudine est Greenwich	14° 59' 56" 65
Altitudine	metri 2950,4.

Esso sta a circa un chilometro dall'orlo meridionale del cratere centrale del vulcano ed a SSE dal suo asse.

L'Osservatorio Etneo dista da quello di Catania 27 Km. in linea retta orizzontale nella direzione NNE ed è a 2880 m. sopra di esso.

*Viabilità.* — Da Catania si va per via carrozzabile fino a Nicolosi (Km. 15). Prima dell'eruzione del 1886 da Nicolosi si andava all'Osservatorio Etneo quasi direttamente: per una mulattiera in direzione NNW si arrivava

(1) Un primo saggio fu fatto nel 1894 da A. Riccò e G. Saija, ed è pubblicato negli annali del R. Ufficio centrale di Meteor. e Geod., serie II, vol. XVII, parte I, 1895, ed un riassunto ne fu dato in questi Rendiconti, vol. V., I sem., serie V, fasc. 8, seduta 26 aprile 1896.



fino ad Est di monte Rinazzi, poi si passava ad Ovest dei monti Concilio ed Ardicazzi, e si andava per un sentiero dritto a Nord con pochi serpeggiamenti.

Avendo l'eruzione del 1886 coperto di lava la strada da monte Rinazzi fino agli Altarelli ad 1 Km. da Nicolosi, si dovette piegare ad W, girando a Sud dei monti Rossi (crateri della grande eruzione del 1669), poi volgere a Nord, e quindi, passando fra i monti S. Leo e Rinazzi, riprendere l'antica strada ad Ovest di monte Concilio. Avendo l'eruzione del 1892 poi coperto un tratto della strada fra i monti Rossi e monte S. Leo, si dovette prendere una via ancora più a ponente, verso monte Segreto, e più lunga; talchè ora il viaggio da Nicolosi all'Osservatorio, senza fermate, dura 6 ore, e da Catania 9 ore, quantunque la distanza fra i due Osservatori in linea retta orizzontale sia solo di 27 Km.: però è da notare che la differenza di livello da guadagnare è di 2880 m., come si è detto.

Nel 1896, con un accordo tra il comune di Nicolosi, il Club alpino e l'Osservatorio, si cercò di ristabilire su per le lave l'antica via diretta da Nicolosi per monte Rinazzi; ma poi vennero a mancare i fondi; e non risultò che un sentiero pietroso e scabroso, che uomini ed animali percorrono con fatica e mal volentieri; e quindi per lo più si continua ad andare per la suddetta via che gira a Sud ed ad Ovest dei monti Rossi.

Nel 1900 i sigg. Caponetto, proprietari di grandi estensioni di terre sul versante meridionale dell'Etna, proposero di fare una via carreggiabile di circa 9 Km. da Nicolosi fino a Casa del Bosco, una delle consuete tappe del viaggio alla cima dell'Etna e masseria principale dei sigg. Caponetto; però essi ponevano per condizione d'avere un sussidio dal Governo per il vantaggio che ne sarebbe risultato al paese ed all'Osservatorio. Ma la domanda fatta al Ministero della Pubblica Istruzione ebbe risposta evasiva. E finora non è maturato alcun progetto che possa facilitare l'accesso ai visitatori del vulcano ed aumentarne l'affluenza, e nello stesso tempo rendere più agevole e più proficuo alla scienza il servizio dell'Osservatorio Etneo.

*Rifugi.* — Anticamente gli unici rifugi lungo la via alla cima dell'Etna erano l'*antica Casa del Bosco* (alt. m. 1615), a nord di monte Capriolo, di cui ora restano solo pochi ruderi, e la *Grotta degli inglesi*, cavità naturale nella lava, all'altitudine di circa 1650 m., di poco a ponente del sentiero che va all'Osservatorio.

Costruito nel 1810 da Mario Gemmellaro di Nicolosi il rifugio o casa, detta la *Gratissima* e poi *Casa degli Inglesi* (per il contributo che nel 1811 diede l'ufficialità della flotta inglese per la migliore riedificazione), la *Grotta degli Inglesi* fu abbandonata. Quindi fu costruita l'attuale *Casa Ferrandina* o nuova *Casa del Bosco* (alt. m. 1438) che serviva di tappa nel viaggio e per abbeverare gli animali.

Nel 1894 coi fondi della sezione catenese e della sede centrale del Club alpino italiano e con un sussidio del Ministero della P. Istruzione fu co-

struita una cantoniera meteorico-alpina (alt. m. 1882) a sud di monte Castellazzo, nella quale l'Osservatorio ha una camera per uso proprio e l'uso comune dei locali di servizio col Club alpino.

Nel 1903 si è costruito un altro piccolo rifugio all'altitudine 2500 m. ad Est del *Castello di Piano del Lago*, il quale ultimo non è altro che un mucchio di pietre per segnale.

In questo luogo, alto ed aperto, più spesso s'incontrano venti violenti e bufere di neve, le quali in passato non di rado obbligavano a retrocedere i viaggiatori giunti già alla distanza di poco più di 2 Km. dall'Osservatorio Etneo.

Cosicchè attualmente il viaggio da Nicolosi all'Osservatorio Etneo è diviso in tre od anche quattro tappe, il che lo rende più facile e più sicuro, specialmente d'inverno; nella quale stagione i muli possono arrivare fino a *Casa del Bosco*, o tutt'al più alla *Cantoniera*, perchè raramente la neve è così fortemente gelata da sopportarne il peso; ed anche gli uomini per lo più affondano molto nella neve, tanto che la salita riesce assai faticosa e lenta.

*Comunicazioni.* — L'isolamento completo in cui si trovava prima l'Osservatorio Etneo era causa di preoccupazione per la sicurezza del personale ed ostacolava parecchi studi. Nel 1897 si ottenne dal Ministero di Poste e Telegrafi la concessione gratuita del materiale sospeso per una linea telefonica da Nicolosi all'Osservatorio Etneo. I Ministeri dell'Istruzione, dello Interno, dell'Agricoltura, la Camera di Commercio di Catania, il Club alpino italiano e la Sezione di Catania contribuirono con delle somme, talchè nel 1898 si potè impiantare la detta linea, lunga 17 Km., che funzionava benissimo.

Ma nell'inverno la neve forma dei grossissimi manicotti attorno al filo, i quali, e per il loro peso, e perchè investiti dai venti violenti, producono frequenti strappi nel filo, rottura degli isolatori, ripiegamento dei bracci, ecc. quantunque il materiale sia di singolare solidità e la distanza dei pali di sostegno nel *Piano del Lago* sia ridotta a soli 20 m.

Avendo notato che la comunicazione telefonica era possibile anche quando, essendo rotti gli isolatori il filo posava sui bracci di ferro e quando la linea era stata abbattuta sulla neve, e ricordando che l'illustre astronomo Janssen aveva potuto telegrafare dal monte Bianco col filo della linea posato sulla neve, feci attaccare la nostra linea nel *Piano del Lago* con semplici ramponi di ferro piantati nei pali a circa 1 m. di altezza per modo che sia poi coperta dalla neve nell'inverno.

Effettivamente la comunicazione telefonica è abbastanza buona, tanto col filo sospeso ai ramponi, che quando è sepolto nella neve. Bisogna concludere che per le correnti telefoniche, che hanno basso potenziale, il legno di castagno dei pali e la neve sono sufficientemente coibenti.

Però anche con questo espediente le interruzioni sono frequenti, tanto

più che si hanno non rare fulminazioni nella parte men alta della linea, che è nella regione dei temporali frequenti.

Sarebbe sommamente desiderabile o una linea sotterranea, o meglio, la comunicazione diretta dei due Osservatori col telegrafo senza fili di Marconi, qualora si avessero i mezzi per l'impianto.

Vediamo ora come all'Osservatorio Etneo si provveda ai bisogni della vita.

*Acqua.* — Sull'Etna non vi sono nè corsi d'acqua, nè sorgenti, perchè la lava e le sabbie vulcaniche sono permeabilissime: solo al piede del vulcano dove le argille trattengono le acque, queste sgorgano alla superficie in alcune sorgenti.

Nella direzione Catania-Nicolosi l'ultima sorgente è la fontana pubblica della *Barriera* all'altitudine di m. 190; alquanto più sopra fino a Gravina (360 m.) vi sono alcuni pozzi scavati attraverso le rocce vulcaniche fino ad arrivare alla roccia di sedimento. Più in alto ancora si fa uso esclusivo di acqua di cisterna.

Però in quella regione eccezionale che è la *Valle del Bove* vi sono sorgenti fino all'altitudine di circa 1000 m.

All'Osservatorio Etneo non si può utilizzare per l'alimentazione l'acqua che cade dalle tettoie, perchè queste sono dipinte ad olio e biacca, onde siano meno intaccate dalle emanazioni del cratere centrale; non si possono avere cisterne in muratura, perchè sarebbero rotte dal gelo e dai movimenti frequenti del suolo; occorrerebbero dei serbatoi di metallo inalterabile (per esempio di nikel), e pertanto molto costosi.

Quindi si fa uso di acqua di neve fusa al sole o al fuoco e poi filtrata, che però ha sempre un cattivo sapore.

Nell'estate la neve si procura da una specie di piccolo ghiacciaio, che per lo più persiste fino alle prime nevicate d'ottobre, e si trova a circa  $1\frac{1}{2}$  Km. a NNW dell'Osservatorio; oppure la neve si provvede dalla *Cisterna piccola* a 300 m. ESE dall'Osservatorio, od anche dalla *Cisterna grande* o *Cisternazza*, a  $1\frac{1}{2}$  Km. SSE. Queste cisterne, specie di ghiacciaie naturali, ove ordinariamente si mantiene la neve per tutto l'anno, sono dei crateri di esplosione del vulcano.

La cisterna piccola ha servito pure come cava di pietra vulcanica per la costruzione dell'Osservatorio.

Però in alcuni anni la neve è stata così scarsa nell'autunno, che si è dovuto portare l'acqua da Nicolosi o dalla *Casa del Bosco*.

*Alimentazione.* — Nell'aria dell'Osservatorio Etneo, fredda, asciutta, antisettica, per le emanazioni del cratere centrale, le provviste da bocca si conservano benissimo. La cottura della pasta (alimento eccellente ed indispensabile nell'Italia meridionale) riusciva pessimamente nelle pentole ordinarie, perchè lassù l'acqua bolle a solo circa 90°. Ho fatto ridurre a pentola di Papin una comune pentola di ghisa, caricandone opportunamente la



valvola con un peso, e dopo di allora la cottura riesce ottima, con grandissima soddisfazione di quella gente semplice e frugale: impiegati subalterni, operai, mulattieri, per i quali i maccheroni sono il cibo preferito, anzi indispensabile.

*Riscaldamento.* — Siccome l'Osservatorio Etneo sta nella *regione deserta* dell'Etna, fino a 5 Km. di distanza non vi sono, nè boschi, nè piante arboree isolate, perciò si adopra come combustibile carbone o petrolio.

L'Osservatorio Etneo è costruito con grossissimi muri, rivestiti esternamente di lava lavorata, e nell'interno le pareti sono rivestite di legname; i pavimenti sono di legno, le invetriate doppie; cosicchè quando non spira vento fortissimo, si è ben riparati. Vi sono nelle camere dei caminetti, ma il *tiraggio* è insufficiente per la poca altezza della canna fumaria, e perchè spesso disturbato dal vento violento, dalla neve ecc. Una stufa di ferro portata lassù, fu ben presto corrosa e resa inservibile. In conclusione per il riscaldamento ordinariamente si è ridotti all'uso del malsano ed infido braciere; al quale d'altronde il personale subalterno è abituato ed *affezionato*. Ma questo mezzo di riscaldamento, che può bastare nella buona stagione, è affatto insufficiente d'inverno; per conseguenza nelle camere allora si ha sempre una temperatura vicina a zero.

A 300 m. NNE dall'Osservatorio vi è il *Vulcarolo*, piccolo cratere che da tempo immemorabile emette continuamente grandi masse di vapore acqueo caldissimo, che con spesa non grandissima, potrebbesi condurre all'Osservatorio e dare per condensazione ottimo riscaldamento ed acqua tepida, utilissima per tanti usi e fors'anche potabile dopo raffreddamento ed aerazione.

*Mal di montagna.* — All'altezza dell'Osservatorio Etneo non tutti ne soffrono ed in egual modo; si hanno i seguenti gradi: accelerazione del polso, svogliatezza ad agire, inappetenza, nausea, vomito, cefalea e qualche volta anche febbre. Generalmente le persone sane e robuste ne risentono meno, ma non è sempre così.

Non pare vi sia influenza della stanchezza, perchè quelli che salgono a piedi non ne soffrono più di quelli che vanno a cavallo.

Quasi sempre i disturbi diminuiscono e passano dopo i primi giorni.

Io sono stato all'Osservatorio Etneo fin 17 giorni di seguito, godendo ottima salute, ed il custode Galvagno vi è stato per 60 giorni continui. Anzi quando si torna di lassù in generale si ha aspetto più florido, non foss'altro per la forte colorazione che assume presto la pelle per il noto effetto della radiazione solare più viva sulle montagne in grazie della maggior trasparenza dell'aria.

*Emanazioni soffocanti.* — Quando il vento spinge sull'Osservatorio le emanazioni del cratere centrale, fra le quali si fa sentire specialmente l'idrogeno solforato, si prova un senso penoso di nausea e di soffocazione. Non vi è altro rimedio che chiudere ermeticamente l'Osservatorio ed attendere che cambi

vento. Però non è mai accaduto di dover lasciar l'Osservatorio per questo inconveniente.

*Eruzioni.* — Dal 1804, epoca della fondazione del primo rifugio, non vi è ricordo, nè indizio che il posto occupato dall'Osservatorio sia stato toccato da eruzioni. Nel 1863 la lava traboccò dal cratere centrale e si diresse verso quel rifugio, detto allora *Casa degli Inglesi*, ma poi deviò verso ponente. Nel 1868 vi fu una eruzione centrale di materiale incandescente tanto colossale che fu vista fin da Malta, ma la detta *Casa* non fu colpita.

Nel 1899 al 19 luglio vi fu una eruzione del cratere centrale di una grande colonna o *pino* di materiali incandescenti e densi vapori, ed altre simili eruzioni minori al 25 dello stesso mese ed al 5 agosto successivo. L'Osservatorio fu proprio bombardato: la cupola di ferro dello spessore di 3 mm. fu traforata in 28 punti: due grosse pietre infuocate, dopo trapassata la cupola, attraversarono il pavimento di legno del piano superiore e quello dell'inferiore, carbonizzando il legno e si piantarono nel terreno sottostante. Un altro proiettile attraversò il tetto del corpo laterale ed andò a cadere proprio sul letto del custode; il resto della tettoia fu colpito in una quarantina di punti. Un mucchio di fimo secco, che stava fuori della scuderia, fu incenerito.

*Sicurezza.* — L'immunità precedente e l'abitudine avevano reso il personale fidente nella sicurezza dell'Osservatorio Etneo, e se accadeva che qualche volta si fosse svegliati dai rumori del cratere centrale o da qualche scossa di terremoto, si ripigliava poi facilmente sonno. Ma dopo la suddetta eruzione del 1899 non si può essere più così tranquilli. Pertanto feci subito costruire quattro cuccette di sicurezza nello spessore fortissimo dei muri, le quali si possono ritenere a prova delle bombe vulcaniche. Da principio il personale vi si coricava, ma tornata la calma nel cratere centrale, ben presto fu dimenticato il pericolo ed ora si dorme di nuovo nei letti, ove la mancanza d'aria si sente meno che nelle cuccette; ad ogni modo queste son pronte in caso di minaccia del nostro vicino, ed anche per il caso più frequente di affluenza di visitatori.

*Gelo ed umidità.* — Nell'inverno e nella primavera l'Osservatorio Etneo resta parzialmente sepolto sotto la neve, per 4 o 5 m., cioè sino al secondo piano, ed allora si entra salendo dal tetto del primo piano, e dalla finestra centrale del secondo, che in vista di ciò ha una speciale costruzione. Però attorno all'Osservatorio resta come un corridoio, largo circa un metro, libero di neve fin quasi al suolo. Questo fenomeno si verifica pure all'Osservatorio del M. Bianco, ed è prodotto dal giuoco dei venti che allontana la neve cadente d'attorno all'edificio; e forse vi contribuisce pure il calore immagazzinato durante l'estate nella massa notevole del fabbricato, che fa fondere la neve vicina alle pareti.

Durante la cattiva stagione l'umidità penetra nei muri, fa cadere gli intonachi e deteriora le serrande.

La cupola di ferro poi, raffreddata dall'aria gelida esterna, agisce da condensatore per l'umidità dell'aria interna, e l'acqua di condensazione cade e gela nell'interno. Da ogni apertura, da ogni fessura, donde possa entrare l'aria esterna, si forma nell'interno neve e ghiaccio in quantità.

*Strumenti meteorici.* — L'alternarsi di umidità, geli, emanazioni corrosive, alle cime dell'Etna, fa sì che i metalli sono presto ossidati ed intaccati; gli olii ed i grassi lubrificanti inspessiscono, le vernici si sgretolano: quindi occorrono frequentissime riparazioni; e ciò specialmente per gli strumenti che debbono stare esposti all'aria libera.

Il termobarografo <sup>(1)</sup> appositamente costruito dal rinomato Richard, con corsa di 2 mesi, nell'inverno si fermava spesso, anche se lubrificato con olio incongelabile. Il motore a pendolo si arrestava per qualunque impedimento, o resistenza, o movimento della macchina o del suolo; inoltre il meccanismo di compensazione, per eliminare l'influenza delle variazioni della temperatura interna, non funzionava regolarmente. Dopo molte prove, dopo averlo ripulito, riparato e riportato lassù due volte, abbiamo dovuto rinunciare a servircene all'Osservatorio Etneo.

Nel 1897-98 feci costruire nella officina dell'Osservatorio di Catania uno strumento registratore della pressione, temperatura ed umidità, munito di un robustissimo orologio motore. L'avevamo messo da poco in prova all'Osservatorio Etneo, quando avvenne l'eruzione centrale del 1899, nella quale l'Osservatorio fu anche invaso da vapori caldi ed acidi e quello strumento ebbe gravi guasti.

Dopo questo secondo insuccesso si sono adoperati i comuni registratori *Richard*, favoriti dall'Ufficio centrale di Meteorologia e Geodinamica; i quali funzionano benissimo anche lassù, ma hanno una sola settimana di corsa; e per noi sarebbe troppo gravoso d'estate, impossibile nell'inverno, andare lassù ogni 8 giorni per caricarli.

Ultimamente nell'estate scorsa 1906 ho acquistato dal Richard uno dei suoi termometri registratori, con corsa di un mese, di costruzione semplice (tipo n. 3). Nella buona stagione ha funzionato bene, ma poi è venuto un inverno pessimo, e per tre mesi è stato impossibile salire all'Osservatorio Etneo, cosa veramente eccezionale.

Del resto anche in altri Osservatori d'alta montagna si sono incontrate gravi ed anche insormontabili difficoltà a far funzionare da soli i meteorografi: citerò solamente l'esempio dell'Osservatorio del M. Bianco <sup>(2)</sup>.

Il termometro asciutto ed il bagnato per la determinazione della temperatura e dell'umidità furono collocati all'Osservatorio Etneo nell'estate 1891 e d'allora in poi se ne fece l'osservazione, ma con irregolari intermissioni;

<sup>(1)</sup> Loco citato, p. 46.

<sup>(2)</sup> *Annuaire pour l'an 1896, publié par le Bureau des Longitudes*, pag. D. 8.



il termobarografo *Richard* fu collocato nell'agosto 1892; il barometro *De-leuil* (sistema Fortin) dovette essere riparato e fu riportato lassù ed osservato solo dal febbraio 1893 in poi; l'evaporimetro fu collocato nel 1892.

Quanto al pluviometro, siccome il gran vento lassù impedirebbe di raccogliere la pioggia e la neve con uno strumento di ordinaria costruzione, abbiamo fatto fare un pluviometro di grande capacità con imboccatura tronco-conica ristretta, affinchè possa ricevere e mantenere, malgrado il vento violento, l'acqua e la neve in quantità notevole; ed è poi così disposto, che dall'interno dell'Osservatorio si possa con un fornello a petrolio far fondere la neve ed il ghiaccio che contenga. Malgrado ciò spesso si vedono le tettoie gocciolare per la pioggia, mentre nel pluviometro non si trova acqua. Questo strumento, fu collocato nel 1894.

Per l'osservazione del vento non abbiamo un anemografo, la cui buona collocazione e manutenzione, specialmente per la parte esposta del meccanismo, presenterebbe serie difficoltà per il vento, il gelo, le emanazioni vulcaniche corrosive, ed in causa delle lunghe assenze del personale. Si aggiunga che l'Osservatorio Etneo è riparato alquanto dal vento di NW, che è il più frequente dalla massa del gran cratere.

Fortunatamente il fumo che esce quasi sempre dalla cima del vulcano dà una indicazione sicura della direzione del vento, che è quella che si nota; l'intensità o forza del vento si stima in gradi: 0 = calma, 1 = debole, 2 = moderato, 3 = forte, 4 = fortissimo, 5 = uragano.

L'osservazione della direzione del vento è controllata e completata da quella che si fa pure all'Osservatorio di Catania della direzione del fumo dell'Etna.

*Osservazioni meteoriche.* — Iniziate all'Osservatorio Etneo nel 1891, hanno assunto maggiore regolarità dal 1903, cioè da quando si prende parte alle osservazioni internazionali dell'alta atmosfera, le quali si fanno per regola, anche con ascensioni aerostatiche, al primo giovedì di ogni mese. In quel giorno si fanno all'Osservatorio Etneo osservazioni dirette ad ogni ora, le quali sono anche controllate dai registratori; negli altri giorni le osservazioni dirette si fanno sempre ad ore 6, 9, 12, 15, 18, 21. Il personale resta lassù almeno una settimana, anche nell'inverno, quand'è possibile.

*Difficoltà.* — Oltre quelle esposte, derivanti dalla posizione speciale dell'Osservatorio Etneo e dalla neve nell'inverno, vi sono altre ragioni per cui il servizio meteorico lassù non può essere regolare e continuo.

1) Primieramente quell'Osservatorio fu ideato e fatto costruire dal compianto prof. Tacchini, non per funzionare in modo continuo, ma solamente per compirvi ricerche speciali, preparate all'Osservatorio di Catania; e perciò i locali sarebbero inadatti ed insufficienti per un soggiorno continuato: oltre i locali d'osservazione e servizio, vi sono soltanto 3 camere per tutti gli altri usi.

2) Il personale è stato sempre in numero troppo scarso per i due Osservatori; da principio: direttore, 2 assistenti, meccanico, custode, 2 inservienti; solo al 1905 si è avuto anche un astronomo aggiunto.

3) Il personale è pagato molto parcamente (come o meno che negli altri Osservatori), e non ha diritto ad alcuna indennità quando va a prestare servizio all'Osservatorio Etneo.

4) La dotazione, eguale o minore di quella d'altri Osservatori italiani, fu da principio assegnata per il solo Osservatorio Etneo, poi ha dovuto servire anche per quello di Catania, quindi è sempre stata ed è tuttora (dopo un recente aumento di L. 500), affatto insufficiente per mantenere come si dovrebbe due Osservatori, dei quali l'uno si è molto sviluppato e l'altro si trova in condizioni del tutto eccezionali, che richiedono forti spese per trasporto di persone, di strumenti, di provviste, per frequenti riparazioni ai locali, alle suppellettili, agli strumenti, in causa delle forti intemperie cui sono esposti e per l'azione corrosiva delle emanazioni del vicino gran cratere; senza parlare dei danni maggiori, fortunatamente rari, per terremoti ed eruzioni.

Debbo però dire che dal 1897 l'Ufficio centrale di Meteorologia e Geodinamica ci accorda un sussidio di L. 500 annue per le osservazioni meteoriche: e che l'Osservatorio ha altri assegni per la sezione geodinamica e la rete sismica della Sicilia, come anche per l'esecuzione della parte spettante all'Italia nell'impresa internazionale della Carta e Catalogo fotografico del Cielo stellato; ma questi fondi debbono essere esclusivamente spesi per lo scopo speciale cui sono destinati.

*Discussione delle osservazioni.* — Quando fu compilato il primo saggio di Meteorologia dell'Etna, non si disponeva di una serie sufficiente di registrazioni per conoscer bene l'andamento diurno, e non si poté adottare il metodo delle differenze (che presta tanti utili servigi in Meteorologia), perchè allora erano iniziate solo da pochi anni le osservazioni meteoriche all'Osservatorio di Catania e non esistevano, o non erano pubblicate, altre serie di osservazioni meteoriche, lunghe ed omogenee, fatte in luoghi vicini all'Etna.

Ora ci possiamo valere di 15 anni di osservazioni regolari fatte all'Osservatorio di Catania ed anche di 31 anni di buone osservazioni fatte a Riposto nell'Istituto Nautico.

E pertanto si è ricavato dai registratori l'andamento diurno per determinare le correzioni da introdurre nei valori osservati nelle ore 6, 9, 12, 15, 18 e 21 per ridurli al medio, e poi si è ridotta la serie discontinua, col metodo delle differenze con Catania e Riposto, ad una serie continua di 15 anni (1892-1907).

**Fisica terrestre.** — *Secondo riassunto delle osservazioni meteorologiche eseguite all'Osservatorio su l'Etna dal 1892 al 1906* <sup>(1)</sup>. Nota dei dott. L. MENDOLA e F. EREDIA, presentata dal Corrispondente A. RICCÒ.

In questa Nota diamo il riassunto di una Memoria di prossima pubblicazione su la « Meteorologia dell'Etna » indicando brevemente i metodi seguiti per ciaschedun elemento, e i risultati per stagioni meteoriche, per semestri freddo (dal novembre a l'aprile) e caldo (dal maggio a l'ottobre) e annuali delle osservazioni eseguite a l'Osservatorio sull'Etna (2947 m.) nel quindicennio 1892-'906.

*Quantità delle osservazioni.* — In questo periodo il numero de' giorni di osservazione è stato:

	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Sem. freddo	Sem. caldo	Anno
1892	—	—	5	7	—	12	12
93	3	4	40	24	11	60	71
94	4	8	47	23	13	60	82
95	6	8	57	15	8	78	86
1896	4	11	38	29	17	65	82
97	19	16	55	55	45	100	145
98	13	34	54	27	34	94	128
99	4	14	26	29	12	61	73
1900	31	31	57	44	62	101	163
01	9	27	26	28	36	54	90
02	16	20	44	15	37	58	95
03	15	18	44	22	30	69	99
1904	18	20	33	27	36	62	98
05	7	15	32	17	24	47	71
06	13	17	30	20	28	52	80
<b>Totale</b>	<b>162</b>	<b>243</b>	<b>588</b>	<b>382</b>	<b>393</b>	<b>982</b>	<b>1375</b>

(1) Un primo riassunto fu eseguito con le osservazioni del 1892-'95 e presentato dal chiar.mo prof. A. Riccò a quest'Accademia nella Seduta de' 26 aprile 1896 (cfr. questi Rendiconti, ser. 5<sup>a</sup>, vol. V, 1<sup>o</sup> sem., p. 306). In una Nota che lo stesso prof. Riccò presenta in questa Seduta, egli espone tutto ciò che riguarda gli strumenti e il modo col quale furono eseguite le osservazioni.



Secondo le diverse ore del giorno il numero delle osservazioni di temperatura (poco differente per gli altri elementi) è stato:

	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Sem. freddo	Sem. caldo	Anno
a 6 <sup>h</sup>	136	202	501	325	316	888	1154
a 9	130	202	501	320	317	836	1153
a 12	136	213	505	329	332	851	1183
a 15	137	200	510	318	322	843	1165
a 18	134	204	515	316	322	847	1169
a 21	131	193	507	310	309	832	1141
Totale (1)	794	1214	2979	1928	1918	5047	6965

*Temperatura dell'aria.* — Da le registrazioni ottenute col termografo ordinario Richard (884 giorni completi dal dicembre 1900 al dicembre 1906) si sono ricavati tutti i valori di 2 in 2 ore, corretti da l'andamento dell'apparato motore. Questi con metodo speciale sono stati sceverati dalle influenze che non hanno periodo nelle 24<sup>h</sup>; con opportuni paragoni con le osservazioni dirette sono stati ridotti a la scala centigrada, e si è ricavato così l'andamento medio diurno per ogni mese di 2 in 2 ore. Da questi valori si sono ottenuti i coefficienti di 12 formole besseliane, le quali hanno servito a regolarizzare l'andamento e a calcolare per ogni mese e per ciascuna delle 24 ore lo scarto della temperatura dal valore medio.

Si è ottenuto così:

	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Sem. freddo	Sem. caldo	Anno
3 <sup>h</sup>	— 0,43	— 0,91	— 1,53	— 0,89	— 0,60	— 1,29	— 0,94
6	— 0,37	— 0,90	— 1,23	— 0,79	— 0,57	— 1,13	— 0,85
9	— 0,12	+ 0,14	+ 0,46	— 0,06	— 0,17	+ 0,38	— 0,11
12	+ 0,67	+ 1,24	+ 1,66	+ 1,29	+ 0,85	+ 1,68	+ 1,27
15	+ 0,79	+ 1,10	+ 1,31	+ 1,05	+ 0,91	+ 1,22	+ 1,07
18	+ 0,16	+ 0,38	+ 0,55	+ 0,24	+ 0,22	+ 0,45	+ 0,33
21	— 0,22	— 0,29	— 0,61	— 0,45	— 0,29	— 0,50	— 0,39
24	— 0,37	— 0,77	— 1,10	— 0,65	— 0,48	— 0,96	— 0,72

Nell'anno si ha l'ora del massimo alle 13 e l'ora del minimo alle 4.

Applicando i valori di sopra (col segno cambiato) alle medie osservate a 6, 9, 12, 15, 18, 21<sup>h</sup>, si sono ottenuti per la temperatura *osservata* i seguenti valori medi:

Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Sem. freddo	Sem. caldo	Anno
— 5°,84	— 2°,70	+ 7°,04	+ 1°,85	— 4°,62	+ 4°,79	+ 0°,09

(1) Non vi sono comprese le osservazioni orarie simultanee de' giorni 26-27-28 luglio 1897 e 28-29 marzo 1898, e le osservazioni internazionali per il lancio de' palloni eseguite al primo giovedì di ogni mese di 2 in 2 ore da l'aprile 1901 al dicembre 1902 e ad ogni ora dal gennaio 1903 in poi.

Ma questi non appartengono a una serie *continua*: per ridurveli si sono ricercati i valori medi mensili della temperatura osservata in Catania negli stessi giorni e ore (9, 15 e 21) di osservazione a l'Etna e si è ricavata la differenza fra questi valori e quelli che sono assunti provvisoriamente come normali ( $\frac{1}{4} [IX^h + XXI^h + \text{Max} + \text{min}]$  del quindicennio 1892-906) per l'Osservatorio di Catania.

Applicando il metodo delle differenze si è ottenuto per la temperatura dell'aria *ridotta* a osservazioni continue (1892-906):

Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Sem. freddo	Sem. caldo	Anno
— 7°,12	— 3°,53	+ 5°,92	+ 0°,75	+ 5°,77	+ 3°,79	— 0°,99

Questi valori risultano inferiori ai precedenti: ed era da aspettarselo, giacchè nelle giornate più rigide sovente non è stato possibile accedere a l'Osservatorio Etneo per eseguirvi delle osservazioni dirette, che per ciò risultano in tal caso meno frequenti.

Operando analogamente con la serie di Riposto si ha per il trentunennio 1876-906:

Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Sem. freddo	Sem. caldo	Anno
— 7°,23	— 3°,52	+ 5°,78	+ 0°,26	— 5°,82	+ 3°,47	— 1°,18

E come media *pesata* da ambo le stazioni:

Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Sem. freddo	Sem. caldo	Anno
— 7°,20	— 3°,42	+ 5°,82	+ 0°,42	— 5°,75	+ 3°,57	— 1°,09

Da questi si ricava il valore del gradiente termico medio per ogni 100 m. di altitudine:

Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Sem. freddo	Sem. caldo	Anno
0°,62	0°,63	0°,65	0°,65	0°,63	0°,65	0°,64.

E per valore del gradiente altimetrico per ogni grado di temperatura:

Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Sem. freddo	Sem. caldo	Anno
m. 161	158	153	153	159	153	156

Annualmente si ha il minimo nel febbrajo e il massimo nel luglio-agosto. Gli estremi assoluti di temperatura osservata sono:

Massima: + 19°,1 (5 agosto 1896)  
 Minimo: — 15°,3 (16 gennajo 1902)  
 Escursione: 34°,4.

In Catania nel quindicennio s'è avuto un'escursione di 42°,9.

Da' registratori si è anche ricavata l'escursione media diurna della temperatura: essa è

Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Sem. freddo	Sem. caldo	Anno
3°,81	4°,21	5°,42	4°,30	3°,92	4°,95	4°,44.

*Attinometria e fotometria.* — Nel settembre 1904 uno di noi insieme col dott. A. Bemporad eseguì osservazioni attinometriche simultanee all'Osservatorio Etneo ed all'Osservatorio astrofisico di Catania, nell'intento di studiare anche per le radiazioni calorifiche il fenomeno dell'assorbimento selettivo dell'atmosfera, già dimostrato per le radiazioni luminose da un precedente lavoro del Bemporad. Le osservazioni eseguite ne' giorni 13 e 14 su raggi molto radenti all'orizzonte (da 75° a 89° di distanza zenitale) hanno confermato pienamente anche pe' raggi calorifici il fenomeno dell'assorbimento selettivo, sebbene le osservazioni fossero in parte ostacolate da un'altro fenomeno, caratteristico delle stazioni molto elevate, come l'Etna, e già studiato dal chiar.<sup>mo</sup> prof. Riccò, dipendente da le correnti umide, che salgono lungo i fianchi del monte con l'alzarsi del sole su l'orizzonte.

I risultati ottenuti <sup>(1)</sup> sono raccolti nella seguente tabella, dove i valori di  $q$  s'intendono misurati in gradi dell'attinometro Arago, e il coefficiente di trasmissione  $p$  è relativo alla massa dell'intera atmosfera in direzione verticale, però per visuali molto inclinate su l'orizzonte.

Distanza zenitale dei raggi in Catania	Intensità della radiazione				Valori	
	Settembre 13		Settembre 14		del coeff. di trasm. $p$	
	Catania	Etna	Catania	Etna	Settem. 13	Settem. 14
75°	—	—	6,00	9,18	—	0,683
80	4,33	7,54	4,20	7,98	0,716	0,683
84	2,33	5,99	2,34	6,35	0,707	0,694
86	1,23	4,81	1,36	5,13	0,712	0,717
87	0,73	4,08	0,91	4,41	0,719	0,738
88	0,34	3,32	0,52	3,64	0,734	0,767
88,5	0,20	2,95	0,36	3,27	0,745	0,787

Le osservazioni fotometriche poi hanno confermato che il valore del coefficiente di trasmissione dell'atmosfera per le radiazioni luminose è sensibilmente minore del valore comunemente ammesso di 0,8. Il valore ottenuto,  $p = 0,322$ , accorda soddisfacentemente con quello,  $p = 0,364$ , già dedotto da le osservazioni di Müller e Kempf (1894) negli stessi Osservatori di Catania e dell'Etna.

*Pressione atmosferica.* — Si è seguito un procedimento esattamente analogo a quello sopra descritto per la temperatura dell'aria. Si è ricavato così:

(<sup>1</sup>) Bemporad A. e Mendola L., *Osservazioni attinometriche e fotometriche eseguite nell'Osservatorio di Catania e nell'Osservatorio Etneo nel settembre 1904.* (Nota preliminare). Boll. dell'Acc. Gioenia di sc. natur., fasc. XCIII.



Per l'oscillazione media diurna da 371 giorni completi di registrazione (giugno 1902-dicembre 1906):

	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Sem. freddo	Sem. caldo	Anno
3 <sup>h</sup>	— 0,22	— 0,32	— 0,47	— 0,33	— 0,25	— 0,42	— 0,33
6	— 0,43	— 0,37	— 0,45	— 0,42	— 0,40	— 0,44	— 0,42
9	+ 0,19	+ 0,14	+ 0,08	+ 0,19	+ 0,17	+ 0,13	+ 0,15
12	+ 0,10	+ 0,27	+ 0,37	+ 0,16	+ 0,15	+ 0,30	+ 0,22
15	— 0,25	— 0,11	+ 0,19	— 0,09	— 0,22	+ 0,09	— 0,06
18	+ 0,03	— 0,10	— 0,04	+ 0,01	— 0,01	— 0,05	— 0,03
21	+ 0,33	+ 0,30	+ 0,22	+ 0,36	+ 0,33	+ 0,27	+ 0,30
24	+ 0,22	+ 0,20	+ 0,10	+ 0,13	+ 0,21	+ 0,11	+ 0,16

E per i valori medi ridotti per differenza con Catania al quindicennio completo 1892-906 (diminuiti di 500 mm.):

Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Sem. freddo	Sem. caldo	Anno
30,77	31,31	38,83	36,70	30,98	37,82	34,40

Come per la temperatura, si ha il minimo di pressione nel febbraio e il massimo nel luglio-agosto: tale differenza media supera di poco i 10 mm., mentre in Catania va poco al di là di 3,6 mm. ed è in senso contrario.

*Tensione del vapore acqueo.* — Con speciale procedimento, basandoci su la nota relazione fra temperatura, umidità relativa e tensione del vapore acqueo sono stati ridotti i valori di questa ottenuti direttamente nelle 6 ore di osservazione a valori medi quali risulterebbero da 8 osservazioni quotidiane con l'intervallo di tre ore.

L'andamento diurno presenta nell'anno un massimo a 15<sup>h</sup> e un minimo a 24<sup>h</sup>. I valori ottenuti, ridotti al quindicennio completo 1892-906, sono:

Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Sem. freddo	Sem. caldo	Anno
1,66	2,44	4,01	3,29	1,95	3,75	2,85

*Umidità relativa.* — Esaminando graficamente i valori medi ottenuti nelle 6 osservazioni quotidiane, si trova che presentano una regolarità quale non potrebbe meglio desiderarsi, con un massimo a 15<sup>h</sup> e un minimo a 3<sup>h</sup>, al contrario di quanto avviene in Catania e nelle stazioni di pianura. Completando la curva cui questi valori danno luogo, si sono ottenuti i valori corrispondenti a 3<sup>h</sup> e 24<sup>h</sup>. Per ricavare poi per i singoli mesi i valori corrispondenti a queste due ore che mancano nella serie di osservazioni dirette per averne 8 quotidiane equidistanti, si è creduto opportuno, invece che per differenza, determinare i coefficienti per i quali bisogna moltiplicare i valori di 6<sup>h</sup> e 21<sup>h</sup> per ottenere rispettivamente quelli di 3<sup>h</sup> e 24<sup>h</sup>: si è trovato così:

$$\text{III}^h = 0,997 \text{ VI}^h$$

$$\text{XXIV}^h = 0,979 \text{ XXI}^h.$$

Ricavati in tal modo i valori medi diurni per i giorni di osservazione sono stati ridotti col solito metodo per differenza con Catania al quindicennio completo 1892-906. Si è ottenuto:

Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Sem. freddo	Sem. caldo	Anno
63,0	62,9	53,4	66,0	63,6	59,1	61,3

*Vento.* — La direzione del vento viene determinata da quella del fumo emanato dal cratere centrale, eliminando in tal modo l'influenza che questo certamente ha sul vento che spira a l'Osservatorio. Su 1000 osservazioni si è avuto come media di tutti i mesi dell'anno:

calma	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
77	54	99	42	16	15	24	65	609

donde si vede che il vento dominante è il NW, che è quello (più esattamente il NNW) dal quale è riparato l'Osservatorio dal cratere: ciò avviene in tutti i mesi dell'anno (da un massimo di 746 ‰ nel marzo a un minimo di 496 nell'ottobre), e in tutte le ore del giorno (da un massimo di 652 ‰ a 15<sup>h</sup> a un minimo di 531 a 9<sup>h</sup>).

L'intensità del vento, espressa nella scala da 0 a 4, ci dà (su 1000 osservazioni con peso eguale per tutti i mesi) le seguenti frequenze:

calma	debole	moderato	forte	fortissimo
77	343	204	299	76

Secondo le diverse ore del giorno si presentano più frequenti le calme a 21<sup>h</sup>, i venti deboli a 12<sup>h</sup>, i moderati a 15<sup>h</sup>, i forti a 21<sup>h</sup>, i fortissimi a 6<sup>h</sup>.

*Nebulosità.* — Nel periodo da 6 a 21<sup>h</sup> si ha il massimo di nebulosità a 15<sup>h</sup>, il minimo a 21<sup>h</sup>; nell'anno si ha il massimo in febbrajo, il minimo in luglio.

Computando la nebulosità in centesimi di cielo coperto si hanno i seguenti valori:

Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Sem. freddo	Sem. caldo	Anno
42,9	40,5	26,2	38,5	42,3	32,7	37,0

Dalle osservazioni simultanee della nebulosità in Catania si ha che ne' 5 mesi maggio a settembre essa è maggiore a l'Etna che in Catania; al contrario negli altri mesi. Ma è necessario osservare subito che ne' mesi più freddi si scelgono le giornate più serene per andare a l'Osservatorio Etneo, e perciò si può senza alcun dubbio asserire che in tutti i mesi dell'anno la nebulosità è maggiore a l'Etna anzichè in Catania.

Da' giorni poi ne' quali si sono eseguite almeno 4 delle 6 osservazioni quotidiane, si è ricavato il carattere della giornata. Considerando come

misti i giorni con nebulosità maggiore di 25 centesimi e minore di 75, come sereni e coperti gli altri, si ha (su 100 giorni di osservazione):

	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Sem. freddo	Sem. caldo	Anno
sereni	37	41	61	37	41	52	49
misti	38	41	36	47	38	41	40
coperti	25	18	4	13	22	7	11

Corrispondentemente in Catania si ha:

	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Sem. freddo	Sem. caldo	Anno
sereni	22	32	75	43	25	63	53
misti	45	46	24	41	46	31	35
coperti	53	22	1	16	39	6	13

Si è tenuto anche conto del numero de' giorni in cui il cratere centrale è rimasto invisibile per nubi nel quindicennio 1892-906 da le Stazioni di Catania e di Riposto, e nel dodicennio 1895-906 da quella di Randazzo. Si sono avuti i seguenti risultati (ridotti a 100 giorni di osservazione):

	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Sem. freddo	Sem. caldo	Anno
da Catania	60	56	33	59	61	43	52
da Riposto	62	60	37	61	66	47	57
da Randazzo	60	52	31	60	59	42	51

*Precipitazioni atmosferiche.* — Tanto la quantità quanto la frequenza delle precipitazioni atmosferiche è a l'Osservatorio Etneo minore di quelle che si hanno in Catania. Come frequenza media si ha:

	Inverno	Primav.	Estate	Autunno	Sem. f.	Sem. c.	Anno
Giorni con pioggia	2	3	2	4	8	3	11
" " nevicata	12	8	2	8	20	10	30
" " grandine	1	1	3	4	2	7	9
Totale	12	5	7	16	30	20	50

Queste ultime cifre sono all'incirca metà di quelle che si hanno in Catania; bisogna notare altresì che nelle nostre regioni le precipitazioni atmosferiche mancano ne' mesi estivi, e perciò su l'Etna le piogge sono rare e sono surrogate da le neviccate o da cadute di nevischio.

Riunendo tutte le osservazioni di neviccate, risulta che in media la prima nevicata suole verificarsi nella prima quindicina di ottobre, l'ultima nevicata nella prima quindicina di giugno e la neve scompare del tutto ai primi di agosto.



**Fisica matematica.** — *Traiettorie e onde luminose in un mezzo isotropo qualunque.* Nota di ANTONIO GARBASSO, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

§ 1. Il problema risolto in questa Nota è quello di determinare le forme dei raggi e delle superficie d'onda della luce, per uno spazio a un numero qualunque di dimensioni, nel quale l'indice di rifrazione sia dato come funzione delle coordinate.

Secondo il principio di Fermat dovrà aversi

$$\delta \int_1^2 n ds = 0,$$

quando l'integrale sia preso fra due limiti fissi; se è

$$ds^2 = \sum_1^r \sigma \sum_1^r \tau a_{\sigma\tau} dp_\sigma dp_\tau,$$

vengono dunque le condizioni

$$(1) \quad \frac{\partial n}{\partial p_\rho} + \frac{n}{2} \sum_1^r \sigma \sum_1^r \tau \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho} p'_\sigma p'_\tau - \frac{d}{ds} \sum_1^r \sigma n a_{\rho\sigma} p'_\sigma = 0,$$

$$[\rho = 1 \ 2 \dots r]$$

nelle quali

$$p'_\sigma = \frac{dp_\sigma}{ds}.$$

Le (1) furono da me stabilite in un lavoro recente, almeno per il caso particolare delle coordinate ortogonali (1).

Ora il prof. V. Volterra ha avuto la cortesia di farmi osservare che le dette equazioni si riducono in più modi alla forma di quelle della dinamica.

Se per esempio si pone

$$\left\{ \begin{array}{l} ds = n du, \\ \dot{p}_\sigma = \frac{dp_\sigma}{du}, \\ T = \frac{1}{2} \sum_1^r \sigma \sum_1^r \tau a_{\sigma\tau} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau, \\ U = \frac{1}{2} n^2, \end{array} \right.$$

(1) A. Garbasso (Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino (2), LVIII, 1906, pag. 1).

risulta

$$\frac{d}{du} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\rho} - \frac{\partial T}{\partial p_\rho} - \frac{\partial U}{\partial p_\rho} = 0 \quad (1).$$

Ancora più interessante è un altro procedimento, proprio anche del Volterra, che permette di arrivare in fondo senza che si cambi la variabile indipendente. Ponendo

$$\left\{ \begin{array}{l} q_\sigma = \sum_1^r n a_{\sigma\tau} p'_\tau, \\ (T) = \sqrt{\sum_1^r \sum_1^r b_{\sigma\tau} q_\sigma q_\tau} \quad (2) \\ H = (T) - n, \end{array} \right.$$

si ottiene

$$\frac{dq_\rho}{ds} = - \frac{\partial H}{\partial p_\rho},$$

mentre è anche

$$\frac{dp_\rho}{ds} = \frac{\partial H}{\partial q_\rho}.$$

In questa Nota io applico una terza trasformazione, distinta dalle precedenti, la quale consiste nel porre

$$ds = \frac{dt}{n};$$

dal punto di vista analitico non si guadagna manifestamente nulla di essenziale, ma dal punto di vista fisico si ha il vantaggio di mettere il *tempo* in evidenza.

Facciamo intanto

$$\dot{p}_\sigma = \frac{dp_\sigma}{dt},$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^r \sum_1^r n^2 a_{\sigma\tau} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau,$$

(1) Questa trasformazione è analoga ad altra, indicata dall'Appell (C. R., XCVI, 1883, pag. 689) e segnalatami pure dal prof. Volterra, relativa al problema del filo flessibile.

(2) In questa formola è

$$b_{\sigma\tau} = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial a_{\sigma\tau}},$$

ove con  $A$  si indichi il determinante delle  $r^2$  grandezze  $a_{\sigma\tau}$ .

e le (1) assumeranno la forma

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\rho} - \frac{\partial T}{\partial p_\rho} = 0.$$

$$[q = 1.2 \dots r].$$

D'altra parte, se si scrive

$$(*) \quad q_\sigma = \sum_1^r n^2 a_{\sigma\tau} \dot{p}_\tau,$$

$$H = \frac{1}{2} \sum_1^r \sum_1^r \frac{b_{\sigma\tau}}{n^2} q_\sigma q_\tau,$$

le (2) forniscono

$$(3) \quad \frac{dq_\rho}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \quad [q = 1.2 \dots r]$$

mentre la definizione (\*) dà subito

$$(3') \quad \frac{dp_\rho}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_\rho}. \quad [q = 1.2 \dots r]$$

Per le (2) le equazioni della propagazione della luce si riducono un'altra volta alla forma di Lagrange, mentre per le (3) e (3') assumono nuovamente la forma canonica di Hamilton.

§ 2. Senza altri calcoli potremo dunque applicare alla nostra quistione il teorema di Jacobi <sup>(1)</sup>, e cioè:

« Se  $W$  è una soluzione completa della

$$(4) \quad -h + \frac{1}{2} \sum_1^r \sum_1^r \frac{b_{\sigma\tau}}{n^2} \frac{\partial W}{\partial p_\sigma} \frac{\partial W}{\partial p_\tau} = 0,$$

« e si indicano con

$$\alpha_1. \alpha_2 \dots \alpha_{r-1}$$

« le sue costanti arbitrarie, le equazioni della propagazione potranno mettersi sotto la forma

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial \alpha_\rho} = \alpha'_\rho, \\ -t + \frac{\partial W}{\partial h} = -t_0, \end{array} \right. \quad [q = 1.2 \dots (r-1)]$$

« dove le  $\alpha'_\rho$  e la  $t_0$  rappresentano delle nuove costanti ».

(1) La possibilità di ricondurre il problema del miraggio alla integrazione di un'equazione del tipo di Jacobi fu già riconosciuta dell'Appell. Egli si occupa però delle traiettorie e non dell'onda; si veda in proposito: *Traité de Mécanique rationelle*, volume II, pag. 43 e seguenti.



Le prime  $r - 1$  fra le (5) danno subito il raggio, la

$$-t + \frac{\partial W}{\partial h} = -t_0$$

è una superficie mobile, che taglia di mano in mano la traiettoria nel punto dove arriva la luce. Eliminando fra le (5) le  $r - 1$  costanti  $\alpha_p$ , si otterrà la superficie dell'onda luminosa.

§ 3. Come esempio del metodo, proviamoci a fare

$$n = \frac{1}{a + bx},$$

e, poichè il fenomeno deve essere di rivoluzione intorno all'asse  $x$ , limitiamo il nostro calcolo al piano  $(x, y)$ .

Viene

$$W = \alpha y + \frac{1}{b} \left[ \sqrt{2h - \alpha^2(a + bx)^2} - \sqrt{2h} \log \frac{\sqrt{2h} + \sqrt{2h - \alpha^2(a + bx)^2}}{a + bx} \right],$$

e le (5) forniscono

$$y - \frac{1}{b\alpha} \left[ \sqrt{2h} - \sqrt{2h - \alpha^2(a + bx)^2} \right] = \alpha',$$

$$-t - \frac{1}{b\sqrt{2h}} \log \frac{\sqrt{2h} + \sqrt{2h - \alpha^2(a + bx)^2}}{a + bx} = -t_0.$$

Poniamo adesso

$$2h = 1,$$

e mettiamo per condizione che  $x, y$  e  $t$  si annullino contemporaneamente, verrà

$$y + \frac{\sqrt{1 - \alpha^2(a + bx)^2}}{\alpha b} = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2 a^2}}{\alpha b},$$

$$\frac{a}{a + bx} \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2(a + bx)^2}}{1 - \sqrt{1 - \alpha^2 a^2}} = e^{-bt}.$$

La prima di queste equazioni individua la traiettoria: è una circonferenza di cerchio.

Eliminando  $\alpha$  si ottiene

$$y^2 + \left[ x - \frac{a}{2b} (e^{bt} + e^{-bt} - 2) \right]^2 = \frac{a^2}{4b^2} (e^{bt} - e^{-bt})^2.$$

La superficie dell'onda è dunque quella di una sfera, che si va allargando, mentre il suo centro si sposta lungo l'asse delle  $x$ .

Se diciamo  $X$  la  $x$  del centro, e  $R$  il raggio dell'onda, viene subito

$$\frac{dX}{dt} = b R ,$$

e cioè: la velocità di traslazione del centro si mantiene proporzionale al raggio.

Se  $b$  tende a zero, l'onda si riduce a

$$x^2 + y^2 = a^2 t^2 ,$$

come del resto si poteva prevedere.

**Meccanica.** — *Integrazione dell'equazione funzionale che regge la caduta di una sfera in un liquido viscoso.* Nota del prof. GIUSEPPE PICCIATI, presentata dal Corrisp. T. LEVI-CIVITA.

Una sfera dotata di moto traslatorio rettilineo (uniforme o no) in seno ad un liquido viscoso incompressibile è soggetta ad una resistenza, di cui si sa assegnare l'espressione generale <sup>(1)</sup>, quando il movimento del sistema abbia il carattere di moto « lento ».

Questa resistenza, per un generico istante  $t$ , dipende in modo funzionale dai valori della velocità e della accelerazione in tutto l'intervallo di tempo che va dall'istante iniziale fino all'istante  $t$ .

Si può in particolare proporsi lo studio del movimento rettilineo della sfera, quando sfera e liquido si trovino sottoposti all'azione della gravità. Si perviene ad un'equazione funzionale da cui si ricava nel modo più generale l'espressione della velocità della sfera sotto forma di una serie, convergente per qualunque valore del tempo.

Da questa espressione si deduce, con procedimento rigoroso, ciò che si era ammesso finora solo per intuizione fisica, cioè che la caduta della sfera tende a divenire uniforme, con la velocità che le compete nel moto stazionario, quando si fanno equilibrio il peso e la resistenza diretta.

L'equazione funzionale che regge il periodo variabile della caduta è stata stabilita dal sig. Basset <sup>(2)</sup>. Egli ne ha costruito un integrale approssimato profittando della piccolezza del coefficiente di attrito. Quanto alla soluzione esatta il Basset osserva « It seems almost hopeless to attempt to determine the complete value ».

<sup>(1)</sup> Vedi la formola (25) della mia Nota: *Sul moto di una sfera in un liquido viscoso*, Rend. Acc. Lincei, 2 giugno 1907.

<sup>(2)</sup> *A Treatise on Hydrodynamics*, vol. II, pag. 291.

Apparirà dalla presente Nota come le attuali risorse dell'analisi permettano agevolmente di effettuare tale integrazione in modo esauriente.

1. Si consideri una sfera di raggio  $a$ , massa  $M$  e densità  $\eta$ , immersa in un liquido incompressibile, viscoso, indefinito di densità  $\varrho$ . La sfera ed il liquido essendo soggetti alla gravità, sia la sfera dotata di moto traslatorio, ed il suo centro descriva la verticale con la velocità  $V(t)$ .

Si suppone che il sistema si trovi inizialmente in quiete. Assumendo per asse  $z$  la verticale passante per il centro della sfera, indichi  $Z$  la resistenza diretta che essa incontra nel suo moto attraverso il liquido, e  $g$  l'accelerazione della gravità; avremo allora per il moto della sfera l'equazione

$$(1) \quad M V'(t) = Mg - Z.$$

Per la resistenza  $Z$  si ha

$$(2) \quad Z = 6\pi a k V(t) + \frac{M'}{2} V'(t) + M'g + 6a^2 \sqrt{\pi k \varrho} \int_0^t \frac{V'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

essendo  $k$  il coefficiente di attrito interno ed  $M'$  la massa del liquido spostato; la (1) assume così la forma

$$(3) \quad V'(t) + \lambda v V(t) - \gamma = -\mu v^{\frac{1}{2}} \int_0^t \frac{V'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

avendo posto

$$(4) \quad \lambda = \frac{9\varrho}{a^2(2\eta + \varrho)}, \quad \mu = \frac{a\lambda}{\sqrt{\pi}}, \quad \gamma = \frac{2(\eta - \varrho)g}{2\eta + \varrho},$$

ed indicando  $\nu = \frac{k}{\varrho}$  il coefficiente cinematico di viscosità del liquido. Si tratta ora di trarre dalla (3) il valore della  $V(t)$ .

Seguendo il criterio delle approssimazioni successive, poniamo

$$(5) \quad V(t) = \sum_0^\infty W_n(t),$$

e determiniamo le  $W$  mediante le equazioni

$$(6) \quad W_0'(t) + \lambda v W_0(t) = \gamma,$$

$$(7) \quad W_n'(t) + \lambda v W_n(t) = -\mu v^{\frac{1}{2}} \int_0^t \frac{W_{n-1}'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

con la condizione di essere nulle per  $t=0$ .

Si verifica immediatamente che, nell'intervallo di tempo in cui la serie (5) è convergente, la sua somma fornisce la soluzione cercata della (3).



Le (6) e (7) si integrano immediatamente e danno, tenendo conto della condizione iniziale,

$$(8) \quad W_0(t) = \frac{\gamma}{\lambda \nu} (1 - e^{-\lambda \nu t}),$$

$$(9) \quad W_n(t) = -\mu \nu^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda \nu t} \int_0^t e^{\lambda \nu u} du \int_0^u \frac{W'_{n-1}(\tau) d\tau}{\sqrt{u-\tau}}.$$

È conveniente per il nostro scopo dare alle  $W_n(t)$  un'altra forma valendosi della funzione

$$(10) \quad \Phi(t) = \int_0^t \frac{e^{-\lambda \nu \tau} d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = e^{-\lambda \nu t} \int_0^t \frac{e^{\lambda \nu \tau} d\tau}{\sqrt{\tau}}$$

già introdotta dal Basset.

La  $\Phi(t)$  è una funzione del suo argomento sempre finita per valori positivi comunque grandi, e si annulla tanto per  $t=0$  quanto per  $t=\infty$ . La sua derivata prima si può mettere sotto la forma

$$(11) \quad \Phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} - \lambda \nu \Phi(t),$$

da cui apparisce che essa è sempre finita, per  $t$  positivo, salvo che per  $t=0$ , dove diviene infinita di ordine  $\frac{1}{2}$ .

Ciò posto, riprendiamo la (9); invertendo l'integrazioni con la regola di Diriclet essa può essere scritta

$$W_n(t) = -\mu \nu^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda \nu t} \int_0^t W'_{n-1}(\tau) d\tau \int_{\tau}^t \frac{e^{\lambda \nu u} du}{\sqrt{u-\tau}},$$

ma è anche

$$\int_{\tau}^t \frac{e^{\lambda \nu u} du}{\sqrt{u-\tau}} = \int_0^{t-\tau} \frac{e^{\lambda \nu (\tau+\xi)}}{\sqrt{\xi}} d\xi = e^{-\lambda \nu \tau} \Phi(t-\tau),$$

quindi risulta

$$(12) \quad W_n(t) = -\mu \nu^{\frac{1}{2}} \int_0^t W'_{n-1}(\tau) \Phi(t-\tau) d\tau,$$

a cui, con una integrazione per parti, notando che  $W_{n-1}(\tau) \Phi(t-\tau)$  è nullo ai limiti, si può dare l'altra forma

$$(12)' \quad W_n(t) = -\mu \nu^{\frac{1}{2}} \int_0^t W_{n-1}(\tau) \Phi'(t-\tau) d\tau.$$

Si ricordi ora che per due qualsivogliano funzioni reali  $H(x)$ ,  $h(x)$  (finite o no, purchè) integrabili insieme ai rispettivi prodotti e quadrati in

un intervallo  $l, L$ , vale la disuguaglianza fondamentale di Schwarz

$$(13) \quad \left| \int_l^L H(x) h(x) dx \right|^2 \leq \int_l^L \overline{H(x)}^2 \cdot dx \cdot \int_l^L \overline{h(x)}^2 \cdot dx.$$

Poniamo in questa per  $H(x)$  il prodotto  $f(x) \cdot g(x)$  (con  $f, g$  nuove funzioni integrabili insieme ai loro quadrati e quarte potenze) ed estraendo la radice quadrata, osservando che per la (13) stessa è

$$\int_l^L \overline{f(x)}^2 \cdot \overline{g(x)}^2 dx \leq \left| \sqrt{\int_l^L \overline{f(x)}^4 dx} \sqrt{\int_l^L \overline{g(x)}^4 dx} \right|,$$

otteniamo

$$(14) \quad \left| \int_l^L f(x) g(x) h(x) dx \right| \leq \\ \leq \left| \sqrt[4]{\int_l^L \overline{f(x)}^4 dx} \cdot \sqrt[4]{\int_l^L \overline{g(x)}^4 dx} \cdot \sqrt{\int_l^L \overline{h(x)}^2 \cdot dx} \right|.$$

Ora nell'intervallo  $0, t$  la  $\Phi'(t-\tau)$  è finita, fuorchè per  $\tau=t$ , ove diviene infinita come  $\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}$ . Quindi se si indica con  $p$  un numero positivo e comunque piccolo, il prodotto  $(t-\tau)^p \Phi'(t-\tau)$  è funzione integrabile nell'intervallo  $0, t$  insieme al proprio quadrato; d'altra parte, per  $p < \frac{1}{4}$ , è anche  $(t-\tau)^{-p}$  integrabile insieme alla sua quarta potenza. Riteneo pertanto che sia  $p$  un qualunque numero positivo minore di  $\frac{1}{4}$  possiamo applicare la disuguaglianza (14) alla (12)' scritta sotto la forma

$$(12)'' \quad W_n(t) = \int_0^t W_{n-1}(\tau) \cdot (t-\tau)^{-p} (-\mu\nu^{\frac{1}{2}} (t-\tau)^p \Phi'(t-\tau)) d\tau,$$

facendo corrispondere  $W_{n-1}(\tau)$  alla  $f$ , la  $(t-\tau)^{-p}$  alla  $g$ , e la  $-\mu\nu^{\frac{1}{2}} \times (t-\tau)^p \Phi'(t-\tau)$  alla  $h$ .

Se si osserva che, prefissato un valore  $T$  a piacere, per  $t < T$  i due integrali

$$\int_0^t (t-\tau)^{-4p} d\tau, \quad \int_0^t \mu^2 \nu (t-\tau)^{2p} \overline{\Phi'(t-\tau)}^2 d\tau$$

restano finiti, si ottiene

$$(15) \quad |W_n(t)| \leq C \sqrt[4]{\int_0^t \overline{W_{n-1}(\tau)}^4 \cdot d\tau},$$

designando  $C$  una opportuna costante positiva (che può dipendere da  $T$  ma

non dall'indice  $n$ ). È evidentemente lecito prenderla tale che fra 0 e  $T$  sia sempre  $|W_0(t)| < C$  (si osservi che è in ogni caso  $W_0(t) < \frac{\gamma}{\lambda\nu}$ ); allora è facile verificare che si ha, per  $t < T$

$$(16) \quad |W_n(t)| < C^{n+1} \sqrt[4]{\frac{t^n}{n!}}.$$

Infatti, supposta la (16) verificata sino ad un valore generico  $n-1$  dell'indice, essa rimane valida anche per il valore successivo. Ciò si ricava ovviamente dalla (15) sostituendo alla  $W_{n-1}(\tau)$  la quantità maggiore

$$C^n \sqrt[4]{\frac{t^{n-1}}{n-1!}}.$$

Per la (16) si può allora concludere che la serie  $\sum_n W_n(t)$  è convergente, essendola quella di termine generale  $C^{n+1} \sqrt[4]{\frac{t^n}{n!}}$ , in quanto il rapporto del termine ennesimo al precedente è  $C \sqrt[4]{\frac{t}{n}}$ , convergente a zero al crescere indefinito di  $n$ .

La serie (5) convergente per  $t < T$ , essendo  $T$  un valore prefissato a piacere, fornisce così la soluzione cercata della (3).

2. Passiamo a stabilire quale è il valore limite di  $V(t)$ , per  $t$  crescente indefinitamente.

Si ponga

$$(17) \quad U_n(\alpha) = \int_0^\alpha W_n(t) dt;$$

se le (7) si moltiplicano per  $dt$  e si integrano fra 0 ed  $\alpha$ , tenendo conto che  $W_n(0) = 0$ , otteniamo

$$(18) \quad W_n(\alpha) + \lambda\nu \int_0^\alpha W_n(t) dt = -\mu\nu^{\frac{1}{2}} \int_0^\alpha dt \int_0^t \frac{W'_{n-1}(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Ora si osservi che

$$\int_0^\alpha dt \int_0^t \frac{W'_{n-1}(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \int_0^\alpha W'_{n-1}(\tau) d\tau \int_\tau^\alpha \frac{dt}{\sqrt{t-\tau}} = 2 \int_0^\alpha W'_{n-1}(\tau) \sqrt{\alpha-\tau} d\tau,$$

quindi con una integrazione per parti, essendo  $W_{n-1}(\tau) \sqrt{\alpha-\tau}$  nullo ai limiti si ricava

$$\int_0^\alpha dt \int_0^t \frac{W'_{n-1}(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \int_0^\alpha \frac{W_{n-1}(\tau) d\tau}{\sqrt{\alpha-\tau}}.$$



Ma per la (17) è  $U'_n(\alpha) = W_n(\alpha)$ , perciò abbiamo per le  $U_n$  le formole ricorrenti

$$(18)' \quad U'_n(\alpha) + \lambda \nu U_n(\alpha) = -\mu \nu^{\frac{1}{2}} \int_0^\alpha \frac{U'_{n-1}(\tau) d\tau}{\sqrt{\alpha - \tau}},$$

dalle quali, come già le  $W_n$  dalle (7), si ricava

$$(19) \quad U_n(\alpha) = -\mu \nu^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda \nu \alpha} \int_0^\alpha e^{\lambda \nu u} du \int_0^u \frac{U'_{n-1}(\tau) d\tau}{\sqrt{u - \tau}}.$$

Per la nota regola dell'Hôpital si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} U_n(\alpha) &= -\mu \nu^{\frac{1}{2}} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\alpha e^{\lambda \nu u} du \int_0^u \frac{U'_{n-1}(\tau) d\tau}{\sqrt{u - \tau}}}{e^{\lambda \nu \alpha}} = \\ &= -\frac{\mu \nu^{\frac{1}{2}}}{\lambda \nu} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\alpha \frac{U'_{n-1}(\tau) d\tau}{\sqrt{\alpha - \tau}}; \end{aligned}$$

ma confrontando con la (18)' si ricava

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} U'_n(\alpha) = 0,$$

il che è quanto dire, per la (17),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_n(t) = 0:$$

così abbiamo in conclusione

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} W_0(t) = \frac{\gamma}{\lambda \nu}.$$

Questo ci dice che il moto della sfera tende a diventare uniforme, la velocità assumendo il valore limite

$$V = \frac{\gamma}{\lambda \nu} = \frac{2a^2}{9k} (\eta - \varrho) g,$$

che è l'espressione nota, dovuta a Stokes, corrispondente al moto stazionario.

Tale formola ha assunto in questi ultimi tempi una speciale importanza per la brillante applicazione fattane dai sigg. H. A. Wilson e J. J. Thomson alla determinazione della carica di un elettrone.

**Fisica.** — *La quantità di elettricità cui dà passaggio la scintilla d'induzione e la sua cosiddetta resistenza* <sup>(1)</sup>. Nota di O. M. CORBINO, presentata dal Corrispondente D. MACALUSO.

1. La curva caratteristica, esprime la relazione tra la differenza di potenziale e l'intensità della corrente, è rappresentata abbastanza bene, nel caso di una *glimmstrom* alla pressione ordinaria, da una formola analoga a quella dell'arco:

$$(1) \quad V = a + \frac{b}{i}$$

nella quale le costanti  $a$  e  $b$  dipendono quasi esclusivamente dalla distanza degli elettrodi <sup>(2)</sup>. Che una tale relazione sussista ancora in regime dinamico, cioè per correnti di brevissima durata e rapidamente variabili come ha luogo con le scintille, sembra a prima vista poco probabile. Purtuttavia il Koch e specialmente l'Heydweiller <sup>(3)</sup> son riusciti, sulla base di questa ipotesi, a giustificare quasi tutte le relazioni quantitative ottenute nelle antecedenti ricerche sperimentali.

Sono specialmente da segnalare le esperienze sulla carica che resta sulle armature di un condensatore quando la scarica si compie aperiodicamente attraverso a una scintilla e a una resistenza molto elevata; e, soprattutto, quelle sulle scariche oscillanti dei condensatori, nei rapporti dell'energia dissipata nella scintilla e del conseguente smorzamento delle correnti.

In quest'ordine d'idee la nozione di resistenza della scintilla, che ha formato oggetto di tanto numerose ricerche sperimentali, perde ogni significato: sia che la si definisca come la resistenza di un conduttore nel quale la stessa scarica dà luogo allo sviluppo di un'eguale quantità di calore, sia che si adotti l'altro criterio di eguagliarla alla resistenza di un conduttore capace di produrre, in eguali condizioni, il medesimo smorzamento nella scarica.

L'estensione della formola (1) al regime dinamico costituisce adunque l'unica risorsa per ogni previsione quantitativa e per la definizione degli effetti dovuti alla scintilla; però ciò apporta, in generale, una grave complicazione nello studio teorico dei fenomeni propri delle correnti variabili,

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Messina.

<sup>(2)</sup> Kaufmann, Physik. Zeitschr., 4, pag. 578, 1903; J. Stark, ibidem, 4, pag. 535. 1903; J. Koch, Ann. d. Phys. 15, pag. 865, 1904.

<sup>(3)</sup> A. Heydweiller. Ann. d. Phys. 19, pag. 649, 1906.

per la presenza nelle equazioni differenziali relative della parte  $a + \frac{b}{i}$ . Così riesce impossibile, nel caso generale, la risoluzione dell'equazione che regge la scarica di un condensatore, e l'Heydweïller vi è riuscito solo dopo di aver liberato l'equazione di alcuni termini, con opportune ipotesi sui valori dei coefficienti.

2. Un caso molto semplice, che è senza restrizioni risolubile col calcolo, fu da me trattato in un recente lavoro sul rocchetto di Ruhmkorff <sup>(1)</sup>. Esso riguarda l'andamento della corrente in un circuito costituito dalla scintilla, e da una resistenza induttiva  $(r, L)$ , e che viene abbandonato a sè, per soppressione della f. e. m. esterna, mentre è percorso dalla corrente  $I$ . Si ha allora, per l'intensità  $i$ , la equazione

$$(2) \quad ri + L \frac{di}{dt} + a + \frac{b}{i} = 0$$

che ammette per integrale generale

$$(3) \quad \log \frac{(i - \alpha)^\alpha}{(i - \beta)^\beta} = -\frac{r}{L} (\alpha - \beta) t + \text{cost}$$

nella quale  $\alpha$  e  $\beta$  sono le radici dell'equazione in  $i$

$$(3 \text{ bis}) \quad ri^2 + ai + b = 0$$

e la costante si può determinare con la conoscenza del valore di  $i$  per  $t = 0$ .

Il caso sperimentale cui è applicabile la (2) è molto semplice a realizzare. Se nel primario di un rocchetto d'induzione si fa agire bruscamente una f. e. m.  $E$ , abbastanza elevata, cosicchè la f. e. m. indotta nel secondario sia capace di fare scoccare una scintilla tra gli estremi di questo, si stabilirà nel secondario in un tempo straordinariamente breve  $\tau$  una corrente  $I_2$  la quale andrà quindi decrescendo aperiodicamente, mentre la corrente primaria che già entro il tempo  $\tau$  ha quasi interamente raggiunto il suo valore finale, non interviene quasi affatto nel successivo decrescimento della secondaria <sup>(2)</sup>.

Ne segue che la quantità totale di elettricità che traversa il secondario viene trasportata integralmente (per la piccolezza di  $\tau$ ) nel decrescimento di  $i$  da  $I_2$  a zero, quando cioè son valide le equazioni (2) e (3). Questa quantità di elettricità, che sarebbe  $\frac{MI_1}{r}$  senza la scintilla (ove  $M$  è il coefficiente di mutua induzione e  $I_1$  il valore finale della corrente primaria), avrà dunque un valore differente; e se la scintilla fosse sostituibile con un

<sup>(1)</sup> O. M. Corbino, *Ricerche teoriche e sperimentali sul rocchetto di Ruhmkorff*, §§. 14, 15, Atti A. E. I., fasc. 3. 4, 1907.

<sup>(2)</sup> Corbino, loc. cit., cap. 1°.



conduttore di resistenza  $\varrho$ , dappoichè il passaggio della corrente accompagna anche con la scintilla la *totale* variazione del flusso secondario, la quantità osservata  $Q$  sarebbe eguale a  $\frac{MI_1}{r + \varrho}$ , cosicchè si potrebbe dalla sua misura ricavare il valore di  $\varrho$ .

Non avendo però, in realtà, alcun significato la resistenza così definita, sarà certo più utile calcolare  $Q$  partendo dalla formola (2) e confrontarla con il valore che dà l'esperienza; si potrà dal confronto dedurre elementi interessanti sull'applicabilità della (1) al regime dinamico in queste condizioni. Sulle ricerche da me eseguite a questo scopo riferisco nella presente Nota.

3. La equazione (2) può mettersi sotto la forma

$$\frac{L i di}{r i^2 + a i + b} = - dt$$

nella quale le variabili sono interamente separate; sarà ancora:

$$\frac{L i^2 di}{r i^2 + a i + b} = - i dt$$

e quindi, indicando con  $Q$  la quantità di elettricità che traversa il circuito tra i valori  $I_2$  e zero di  $i$ ,

$$Q = L \int_0^{I_2} \frac{i^2 di}{r i^2 + a i + b}.$$

Si osservi intanto che se  $-\alpha$  e  $-\beta$  sono le radici del trinomio  $r i^2 + a i + b$  eguagliato a zero, si ha

$$\frac{i^2}{r i^2 + a i + b} = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \cdot \frac{i}{r(i + \alpha)} - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \cdot \frac{i}{r(i + \beta)}$$

e quindi

$$L \int \frac{i^2 di}{r i^2 + a i + b} = \frac{L}{r} \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \int \frac{i di}{i + \alpha} - \frac{L}{r} \frac{\beta}{\alpha - \beta} \int \frac{i di}{i + \beta} + \text{cost.}$$

Eseguendo le integrazioni del secondo membro e limitando tra zero e  $I_2$  avremo dunque

$$\frac{r}{L} (\alpha - \beta) Q = (\alpha - \beta) I_2 - \alpha^2 \log \frac{I_2 + \alpha}{\alpha} + \beta^2 \log \frac{I_2 + \beta}{\beta}$$

ovvero

$$(4) \quad Q = \frac{L}{r} \left[ I_2 - \frac{\alpha^2}{\alpha - \beta} \log \frac{I_2 + \alpha}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha - \beta} \log \frac{I_2 + \beta}{\beta} \right].$$

Questa formola, conoscendo i valori di  $I_2$ , di  $r$  ed  $L$ , e delle costanti  $a$  e  $b$  della scintilla, permetterà quindi di calcolare  $Q$ .

Il valore di  $I_2$ , nel caso sperimentale di cui ci occupiamo, rappresenta il valor massimo, rapidamente raggiunto, della corrente secondaria; ed è eguale sensibilmente, come si stabilì nel lavoro citato, a  $\frac{MI_1}{L}$ , ove  $I_1$  è il valore finale della corrente primaria. Infine per le costanti  $a$  e  $b$  ci si può servire dei valori dedotti dalle misure eseguite con le correnti continue.

4. Per la misura sperimentale di  $Q$  mi son servito di un rocchetto di Ruhmkorff di 15 centimetri di scintilla, quasi identico a quello già da me studiato nelle ricerche surriferite.

Nel primario si inviava la corrente generata da una batteria di accumulatori, regolandola con un reostato; la f. e. m. impiegata era di circa 60 volt, cosicchè si potevano ottenere al secondario scintille della lunghezza massima di circa 1,25 mm. Si tornò a verificare col tubo Braun che, malgrado la costante di tempo del primario avesse un valore più grande che nelle mie prime esperienze, la corrente secondaria raggiungeva in un tempo inapprezzabile il suo valore massimo, e che inoltre la corrente secondaria, la quale si stabiliva subito alla chiusura, accompagnava durante tutta la sua variazione il flusso secondario.

La quantità di elettricità indotta nel secondario a ogni chiusura del circuito primario veniva misurata facendole attraversare un galvanometro balistico ad ago mobile convenientemente shuntato. Essendo le scariche (relativamente) di lunga durata, e non essendo molto elevata la f. e. m. indotta non erano a temere scariche interne nelle bobine del galvanometro, che del resto erano costituite di poche spire di filo grosso e avevano perciò una autoinduzione molto piccola.

Gli elettrodi tra cui scoccava la scintilla erano di forma sferica, del diametro di circa 1 centimetro, e costituite di diversi metalli: particolari cure furono prese per ripulirle nella regione utile per la scarica: la loro distanza era regolabile con una vite micrometrica.

Il valore di  $M$  si deduceva, per ciascun valore dell'intensità primaria, dalla quantità di elettricità scaricata a secondario chiuso in corto circuito; però entro il campo utilizzato per le misure  $M$  aveva valori poco discosti tra loro.

Nei limiti delle divergenze tra due misure consecutive, eseguite in identiche condizioni, nessuna differenza sistematica si poté stabilire tra i risultati ottenuti col ferro, l'ottone, lo zinco e il rame. Notevoli differenze si accertarono invece sperimentando con palline di carbone, fabbricate con carboni da lampada ad arco senza miccia; con queste ultime si ottennero sempre deviazioni più grandi, a parità di circostanze, e inoltre si raggiungeva una distanza esplosiva doppia di quella ottenuta con elettrodi metallici. Se un elettrodo era di carbone e l'altro di rame si avevano gli stessi risultati che con due elettrodi entrambi di carbone o entrambi di rame secondo che il primo o il secondo funzionava da *catodo*.

I risultati delle esperienze sono riportati nella tabella che segue, nella quale la prima colonna contiene i valori dell'intensità finale della corrente primaria e le altre le deviazioni avute per le diverse lunghezze della scintilla espresse in millimetri, e il diverso materiale di cui eran costituiti gli elettrodi.

TABELLA I.

I <sub>1</sub> Amp.	CARBONE				RAME			
	d = 0,5	d = 1	d = 1,5	d = 2,5	d = 0,25	d = 0,5	0,75	1
2	1,5	1,5	—	—	—	—	—	—
3	6,5	6	4	3	4,5	—	—	—
4	15	10	8	6	8	7	6,5	5
5	24	16	12	10	13	12	10	8,5
6	34	24	18	16	18	17	15	13
7	44	32	24	21	24	22	20	18
8	54	41	33	27	31	28	26	23
9	64	49	41	34	38	34	32	29
10	74	58	50	41	45	40	38	35
11	84	67	59	49	52	47	45	41

I numeri registrati nella tabella non sono quelli direttamente ottenuti con l'esperienza; i risultati di ciascuna serie, più volte ripetuta e concordanti entro una divisione, venivano riportati su un diagramma, e da questo, arrotondando la cifra delle unità per soppressione della prima decimale, si deducevano le deviazioni corrispondenti ai valori interi di I<sub>1</sub> dati dalla prima colonna, ai quali del resto erano molto prossimi quelli direttamente osservati.

Dall'esame dei numeri della tabella, oltre che l'andamento delle deviazioni al variare di I<sub>1</sub>, andamento che riusciva però meglio visibile dai diagrammi, si riconosce subito la grande differenza tra i risultati avuti col carbone e quelli avuti col rame e gli altri metalli.

5. Si poteva passare dalle deviazioni galvanometriche ai valori assoluti delle quantità di elettricità tenendo conto del rapporto tra i due rami dello shunt, di cui uno conteneva il galvanometro, e della costante di questo, che fu determinata coi noti metodi. Furono inoltre calcolati per le diverse distanze tra gli elettrodi metallici, e sulla base della formola (3), i valori teorici assoluti delle quantità di elettricità. Si aveva

$$r = 7000 \quad , \quad L = 180;$$



inoltre si adottarono per  $\alpha$  e  $\beta$  i valori determinati dal Koch e trascritti nel seguente specchietto:

$d$ mm	$\alpha$ (volt)	$\beta$ (watt)
0,25	322	0,15
0,5	343	0,3
0,75	365	0,45
1	386	0,6

Si ottennero così per mezzo della (3 bis) i valori di  $\alpha$  e  $\beta$  e si riconobbe che nella (3), per i valori di  $I_2$  compresi fra 20 e 70 milliampere, il termine in  $\alpha$  era abbastanza piccolo di fronte agli altri due; anche  $\alpha$  era molto piccolo di fronte a  $\beta$ . I valori di  $Q$  vennero calcolati per i valori di  $I_2$  eguali a 20, 30, 40, 50, 60, 70 milliampere; quindi per mezzo della formula

$$I_2 = \frac{M}{L} I_1$$

si calcolarono i valori della corrente primaria  $I_1$  capaci di dar luogo alle correnti  $I_2$  impiegate nel calcolo, e allora le grafiche già costruite coi valori sperimentali di  $Q$  in funzione di  $I_1$  permettevano di dedurre le quantità di elettricità corrispondenti date dall'esperienza.

La tabella II riassume i risultati e permette il confronto tra i valori osservati e quelli calcolati.

TABELLA II.

$I_1$ Amp.	$I_2$ milli- amp.	Q in microcoulomb							
		$d = 0,25$		$d = 0,50$		$d = 0,75$		$d = 1 \text{ mm.}$	
		Calcol.	Osserv.	Calcol.	Osserv.	Calcol.	Osserv.	Calcol.	Osserv.
2,8	20	84	66	73	—	—	—	—	—
4,3	30	174	160	157	140	153	120	147	100
5,7	40	283	260	262	250	254	220	237	190
7,1	50	410	400	383	365	374	330	349	290
8,5	60	550	550	518	500	502	470	475	420
10	70	701	710	664	644	644	615	612	560

6. Come si vede la concordanza è veramente rimarchevole per le scintille di 0,25 e anche di 0,5 mm. qualora si pensi alla molteplicità delle ipotesi e delle misure che sono necessarie per giungere ai numeri della

tabella, e alla circostanza che il confronto avviene tra i valori assoluti delle quantità di elettricità.

Le differenze ottenute con scintille più lunghe superano senza dubbio gli errori commessi nelle misure; occorre quindi discutere le cause che possono determinarle.

La causa più grave risiede certamente nell'aver ammesso che alla corrente primaria  $I_1$  corrisponda una corrente secondaria

$$I_2 = \frac{MI_1}{L}$$

anche con le scintille più lunghe; e purtroppo una piccola differenza nel valore di  $I_2$  influisce notevolmente sul valore calcolato di  $Q$ .

Ora fu dimostrato nel lavoro sopra riferito che la corrente  $I_2$  ha quel valore solo quando il secondario è chiuso metallicamente e la sua costante di tempo è molto grande di fronte a quella del primario. Se, d'altra parte, per tener conto della presenza della scintilla, si cerca di integrare il sistema di equazioni che reggono la fase di chiusura, completando l'equazione relativa al secondario con l'aggiunta dei termini  $a + \frac{b}{i}$ , si incontrano difficoltà insormontabili. Invece l'integrazione è ancora possibile se si comincia col tener conto solo del termine  $a$ ; e si può dimostrare che: se le costanti proprie dei circuiti son tali che con secondario chiuso in corto circuito il massimo valore della corrente alla chiusura sia sensibilmente eguale a  $\frac{MI_1}{L}$ , lo stesso valore sarà raggiunto malgrado la presenza del termine  $a$  dovuto alla scintilla.

Altrettanto non può dirsi per il termine  $\frac{b}{i}$  che può interpretarsi come dovuto a una resistenza variabile di valore istantaneo  $\frac{b}{i^2}$ , cioè di valore particolarmente elevato per le correnti di piccola intensità e le scintille più lunghe; e noi sappiamo che per l'introduzione di una resistenza nel circuito secondario si modifica, per quanto di poco, la intensità massima secondaria. Adunque alle correnti  $I_1$  corrisponderanno valori di  $I_2$  minori di quelli impiegati nel calcolo di  $Q$  e riportati nella seconda colonna; almeno per le scintille di maggiore lunghezza. Effettivamente con l'osservazione diretta dell'ampiezza massima della corrente secondaria al tubo di Braun ho potuto constatare che per piccoli valori della intensità della corrente primaria, il valore massimo della corrente secondaria si riduce alquanto aumentando la lunghezza della scintilla da 0,1 a 1 mm. Tale effetto è molto meno marcato con correnti primarie più intense; e in realtà dall'ispezione della tabella II si può riconoscere che, aumentando l'intensità della corrente pri-

maria, le divergenze tra i valori calcolati e quelli osservati acquistano una entità relativa minore.

Concludendo le quantità di elettricità calcolate sulla base della formola (1) e con le costanti proprie delle correnti continue concordano in massima con quelle date dall'esperienza — e le divergenze accertate non sembrano imputabili alla ipotesi che la (1) sia applicabile alla scintilla, ma consentono un'altra spiegazione che ne giustifica il senso e l'andamento.

**Fisica.** — *Sull'effetto fotoelettrico di alcune sostanze usate negli attinometri elettrochimici.* Nota di A. POCHETTINO, presentata dal Corrispondente A. SELLA.

È nota la spiegazione data dal Lenard <sup>(1)</sup> dell'effetto fotoelettrico scoperto da Hertz e studiato poi dal Righi e dall'Hallwachs: la luce ultravioletta arrivando sulla superficie di certe sostanze provoca l'emissione da essa di elettroni negativi i quali, dotati di velocità notevoli, jonizzano l'aria o il gas adiacente alla superficie emittente; il numero di questi elettroni emessi è proporzionale all'intensità della luce eccitatrice, la loro velocità ne è invece indipendente.

Ora giacchè, secondo le idee moderne, la conducibilità elettrica metallica sarebbe dovuta ad elettroni liberi si può sospettare che le sostanze le quali possiedono l'effetto Hertz-Lenard subiscano una diminuzione di resistenza sotto l'influenza della luce ultravioletta; il numero già molto grande degli elettroni liberi nei metalli spiega sufficientemente i risultati negativi delle esperienze di questo genere effettuate sui metalli dal Bädcker <sup>(2)</sup>: era naturale quindi rivolgere l'attenzione a qualche sostanza dotata di una conducibilità elettrica di un ordine notevolmente inferiore. Già Becquerel ed Arrhenius avevano mostrato che lo joduro d'argento sia solido che in soluzione acquosa presenta un sensibile aumento di conducibilità elettrica sotto l'azione della luce; recentemente lo Scholl <sup>(3)</sup>, studiando la natura degli joni cui è dovuta la conducibilità di questa sostanza allo stato solido, arriva alla conclusione che questi joni hanno una mobilità enormemente maggiore di quella degli joni elettrolitici ordinari; egli suppone quindi che essi siano almeno per un tratto della loro traiettoria degli elettroni liberi. Ma, se ciò è vero, allora lo joduro d'argento deve mostrare l'effetto Hertz-Lenard; infatti il Wilson <sup>(4)</sup> ha potuto dimostrare che così è, e ciò non solo per lo

<sup>(1)</sup> Ann. d. Phys. (4). 8, pag. 149, 1902.

<sup>(2)</sup> Leipz. Ber. 55, pag. 198, 1903.

<sup>(3)</sup> Ann. d. Phys. (4). 16, pp. 193 e 417, 1905.

<sup>(4)</sup> Ann. d. Phys. (4). 23, pag. 197, 1907.



joduro d'argento, ma anche per quegli strati d'argento granuloso, caratterizzati da una resistenza elettrica enorme, che si ottengono per trasformazione dello joduro d'argento sotto l'azione della luce; è da notarsi però che per lo ioduro d'argento il massimo dell'effetto Hertz-Lenard si ha con la luce ultravioletta, mentre la massima variazione di resistenza si ha per illuminazione con luce violetta,

Un altro fenomeno elettrico provocato dalle radiazioni luminose è quello scoperto da Becquerel, ossia la variazione della forma elettromotrice di un elemento quando uno degli elettrodi venga colpito dalla luce <sup>(1)</sup>; ed anche di questo fenomeno si è tentato recentemente <sup>(2)</sup> di dare una spiegazione

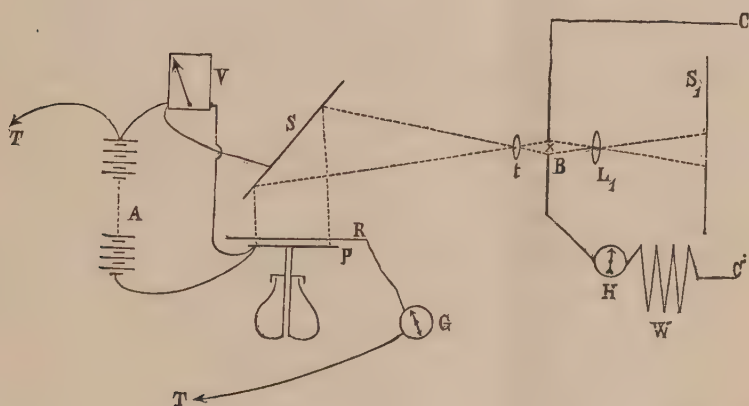


FIG. 1.

basandosi sopra il meccanismo dell'effetto Hertz-Lenard. Ma se è possibile l'esistenza di un nesso fra questi due fenomeni le sostanze che presentano uno dei due fenomeni devono presentare anche l'altro: questo ho voluto dimostrare colle esperienze sulle quali riferisco nella presente Nota.

La disposizione sperimentale da me adottata è analoga a quella usata da Stoletow <sup>(3)</sup> nelle sue ricerche sull'effetto fotoelettrico nello zinco.

Sul piatto P di un isolatore di Mascart si pone la lamina della sostanza da studiare; questo piatto può essere portato mediante una batteria A di piccoli accumulatori ad un potenziale negativo noto per mezzo di un voltmetro a quadranti verticali V del tipo Kelvin-Siemens e Halske. Di fronte al piatto P si trova una reticella circolare R di ferro, di diametro un

(<sup>1</sup>) Rigollot H. *Sur les actinomètres electro-chimique*. Lion 1897.

(<sup>2</sup>) Ramsay and Spencer, *Phil. Mag.* (6). 12, pag. 413, 1906.

(<sup>3</sup>) *Journ. d. phys.* II, 9. pag. 463. 1890.

po' maggiore di quello del sottostante piattello, sostenuta da un sostegno isolante e posta in comunicazione col suolo attraverso un galvanometro G, del tipo Deprez-d'Arsonval, costruito da Siemens e Halske, della resistenza di 10,000 Ohm e con una sensibilità di  $8 \times 10^{-10}$  Ampère per millimetro della scala. Sulla lamina da studiare si può far cadere mediante uno specchio metallico S (in acciaio) e una lente L di quarzo la luce proveniente da un arco voltaico B alimentato dalla corrente alternata stradale a 100 Volta; onde ottenere durante le misure la massima costanza possibile nell'intensità luminosa dell'arco, in serie con questo era inserito un amperometro H e una resistenza W; manovrando opportunamente quest'ultima si poteva ottenere un arco di lunghezza costante (il che si controllava proiettando l'immagine dei due carboni con una lente L, su uno schermo S), attraversato da una corrente di intensità costante: in tal modo ho potuto compiere delle serie di osservazioni con risultati notevolmente concordanti. I carboni usati per l'arco portavano la marca C. Conradty di Norimberga, lettera C; la distanza fra l'arco B e la lente L era di 20 centimetri; fra la lente L e lo specchio S di 60 centimetri; fra il centro dello specchio S e il piattello P di circa 25 centimetri; il diametro della lamina da studiare di 82 millimetri.

Nell'opera citata del Rigollot sugli attinometri elettrochimici sono menzionate come specialmente sensibili rispetto all'effetto Becquerel le lamine di rame ossidate, clorurate, bromurate, iodurate e fluorurate; su queste lamine vennero compiute le misure riguardanti l'effetto Hertz-Lenard che qui riferisco. Tutte le lamine adoperate vennero tagliate nelle dimensioni volute da un unico foglio di rame cilindrato dello spessore di circa un millimetro; esse vennero sempre smerigliate colla massima cura onde renderne la superficie ben liscia ed atta a ricevere uno strato il più uniforme possibile della sostanza sensibile da studiare.

Le lamine che diedero l'effetto Hertz-Lenard più cospicuo furono quelle jodurate; esse vennero preparate coi due procedimenti suggeriti dal Rigollot ossia: o elettrolizzando per due o tre minuti primi una soluzione acquosa di joduro di potassio al 20 % con una densità di corrente di  $0,01 \frac{\text{amp}}{\text{cm}^2}$ . oppure tenendo le lamine di rame per 5 minuti primi in una soluzione alcoolica di jodio. Le lastre così preparate, lavate prima in acqua e poi in alcool e lasciate asciugare completamente prima di adoperarle, si comportano identicamente qualunque sia stato il processo adoperato per prepararle.

Ecco infatti i risultati ottenuti per due lastre preparate nei due modi ricordati: Distanza fra lastra e rete = 2 millimetri; illuminazione con arco voltaico lungo 5 millimetri, alimentato da una corrente di 8 Ampère; i numeri riportati rappresentano l'intensità della corrente fotoelettrica fra lamina e rete sovrastante essendosi assunta come unità una corrente di  $8 \times 10^{-10}$  Ampère.

Differenza di potenziale in volta fra lastra e rete . . . .	40	80	120	240	360
Lastra preparata coll'elettrolisi .	4	5]	7	8	9
Lastra preparata colla immersione in soluzione di Iodio .	4	6	7		8 $\frac{1}{2}$

È notevole l'analogia che si scontra fra il comportamento attino-elettrochimico e quello fotoelettrico: un attinometro elettrochimico preparato con lastre come queste presenta da principio una certa sensibilità che cresce poi per un certo tempo e diviene costante in capo a circa mezz'ora; ebbene una lastra di rame iodurato presenta, appena preparata, un effetto fotoelettrico che va man mano crescendo per circa tre quarti d'ora e poi rimane costante. La costanza di quest'effetto è molto grande, come si può rilevare da questi numeri ottenuti nelle stesse condizioni delle esperienze più su ricordate, ma con una differenza di potenziale fra lastra e rete di 840 Volta:

Lastra preparata da :	Intensità della corrente fotoelettrica
2 ore	9
10 "	10
2 giorni	9,5
15 "	9,6
1 mese	9
3 "	9,5

Stabilite le proprietà fotoelettriche delle lastre di rame iodurato, sono passato a vedere primo: come variasse l'intensità della corrente fotoelettrica variando la distanza fra preparato sensibile e rete e variando la differenza di potenziale fra di essi; secondo: in che rapporto stesše la sensibilità fotoelettrica di questi preparati con quella dello zinco amalgamato di fresco.

Ecco una tabella contenente i dati relativi alla prima questione: in tutte queste esperienze l'illuminazione era fatta con un arco voltaico lungo 18 millimetri, alimentato da una corrente di 18 Ampère:



Distanza fra lamina e rete	Differenza di potenziale fra lamina e rete											
	40	80	120	240	360	480	600	720	840	940	1040	1140
1 mm.	22	29	33	39	44	47	48 $\frac{1}{2}$	49	49 $\frac{1}{2}$	52	57	67
2 mm.	15	20	25	32	37	38	39	39	39	40	44	48
8 mm.	8	15	18	24	27	29	30 $\frac{1}{2}$	30 $\frac{1}{2}$	31	31	35	39
18 mm.	4	9	13	19	23	25	26	26	26	27	27 $\frac{1}{2}$	29

E riportando questi numeri su un grafico, otteniamo il seguente diagramma:

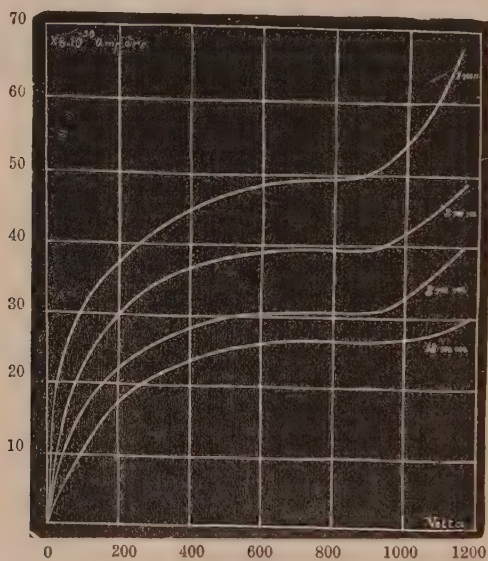


FIG. 2.

Richiamo l'attenzione sul fatto che dall'esame di queste curve risulta che per una differenza di potenziale fra lamina e rete fra i 600 e i 700 Volta le curve tendono ad assumere un andamento parallelo all'asse delle ascisse e ciò indipendentemente dalla distanza fra lastra e rete, mentre da detta distanza dipende l'intensità della corrente fotoelettrica.

Per dare un'idea dell'entità dell'effetto fotoelettrico delle lamine di rame iodurato riporto qui i risultati ottenuti nelle stesse condizioni (illuminazione con arco lungo 18 millimetri alimentato da una corrente di 18 Ampère; distanza fra piatto e rete = 2 millimetri) con una di queste lamine e una lastra di zinco amalgamato delle stesse dimensioni:

Lamina	Differenza di potenziale in Volta fra lamina e rete								
	40	80	120	240	360	480	600	720	840
Rame iodurato	15	20	25	32	37	38	39	39	39
Zinco amalgamato	3	4	5	5 $\frac{3}{4}$	6	6	6 $\frac{1}{2}$	6 $\frac{1}{2}$	6

Come si vede, il rame iodurato è considerevolmente più sensibile alla luce che non lo zinco amalgamato, le due correnti fotoelettriche stando fra di loro come 39:6 per una differenza di potenziale fra i 600 e gli 800 Volta.

Le lamine di rame iodurato non subiscono diminuzione sensibile nell'effetto fotoelettrico, anche se vengono lasciate esposte alla luce dell'arco per una buona mezz'ora.

Seguendo le indicazioni del Rigollot le altre lamine studiate vennero preparate così:

*Rame bromurato*: elettrolizzando una soluzione di bromuro di potassio al 20 % per tre minuti primi con una corrente di  $0,01 \frac{\text{Amp}}{\text{cm}^2}$ , oppure immergendo la lastra di rame per 15 minuti primi in una soluzione alcoolica di bromo; le lamine così preparate presentano un aspetto biancastro, però si alterano man mano alla luce annerendo un poco: l'effetto Hertz-Lenard da principio piccolissimo aumenta in capo a poche ore fino ad un valore che rimane poi costante per certo tempo; però, al contrario di quello che avviene nelle lamine di rame iodurato, sotto l'azione prolungata della luce dell'arco l'effetto diminuisce notevolmente.

*Rame fluorurato*: Esponendo la lamina di rame pulita all'azione dell'acido fluoridrico, emanante da una soluzione acquosa di questo; anche questi preparati si alterano col tempo.

*Rame clorurato*: elettrolizzando una soluzione acquosa di cloruro di sodio al 20 % per 10 minuti primi con una corrente di  $0,01 \frac{\text{Amp}}{\text{cm}^2}$ ; lo strato di colore biancastro che così si forma è molto sensibile in principio, poi annerisce abbastanza rapidamente perdendo la sua sensibilità fotoelettrica.

*Rame ossidato*: riscaldando fortemente su un becco Bunsen una lamina di rame ben pulita finchè abbia acquistato per riflessione un colore nero-violaceo.

I numeri che si ottengono operando con queste sostanze quando possiedono la massima sensibilità fotoelettrica. cioè circa un'ora dopo la loro preparazione sono i seguenti:

Distanza fra preparato e rete = 2 mm.

Illuminazione con arco lungo 18 mm. alimentato da corrente di 18 Ampère:

Durata di una serie di osservazioni per preparato: 20 minuti.

Lamina	Differenza di potenziale in Volta fra lastra e rete								
	40	80	120	240	360	480	600	720	840
Rame bromurato	11	16	20	25	28	30	32	32	32
idem a 18 mm.	6	8	10	12	14	15	17	17	17
Rame clorurato	8	11	14	17	19	20	20	20	20
Rame fluorurato	1	1,5		2,5	2,9	3	3	3	3
Rame ossidato	0,5	1	1,7	2,2	2,4	2,7	3	3	3

Se si ordinano questi preparati a seconda della loro sensibilità per l'effetto Becquerel e per l'effetto Hertz-Lenard si ottengono queste due serie:

*Effetto Becquerel.*

Rame bromurato.  
 " jodurato.  
 " ossidato.  
 " { clorurato.  
     { fluorurato.

*Effetto Hertz-Lenard.*

Rame jodurato.  
 " bromurato.  
 " clorurato.  
 " { ossidato (1).  
     { fluorurato.

(1) Distribuendo su una lamina di ferro uno strato sottile rispettivamente di ossido di rame nero e di cloruro rameoso bianco ho ottenuto per una distanza fra preparato e



Come si vede, le due serie sono diverse, quindi sebbene le sostanze che presentano il primo effetto siano pure dotate del secondo, l'analogia fra i due fenomeni non va più in là. Di più noterò: in tutti i preparati ricordati nell'effetto Becquerel la lamina illuminata diventa *positiva* rispetto a quella tenuta allo scuro, invece nelle lamine bromurate ricavate coll'immersione nella soluzione di bromo la lamina illuminata diventa *negativa* rispetto a quella tenuta allo scuro; ora per quel che riguarda l'effetto Hertz-Lenard le lamine di rame bromurato sia preparate per via elettrolitica, sia colla soluzione di bromo si comportano egualmente.

Nel suo trattato sugli attinometri elettrochimici il Rigollot dimostra che se si tingono i preparati di rame con certe materie coloranti si ottiene negli attinometri così formati una maggiore sensibilità e uno spostamento di questa verso le luci di minore rifrangibilità e precisamente secondo questo specchietto:

Preparato	Materia colorante	$\lambda$ per cui si ha la massima sensibilità
Cu ossidato	—	0,470
" "	Violetto metile	0,620
" "	Eosina	0,554
" "	Eritrosina	0,560
Cu iodurato	—	0,410
" "	Cianina	0,623
" "	Verde malachite	0,658

Operando in modo analogo per l'effetto Hertz-Lenard ho notato che questo colla tintura dei preparati diminuisce grandemente, specie per le lamine di

rete di 2 mm., e con un arco lungo 18 millimetri alimentato da una corrente di 18 Ampère i seguenti numeri:

Sostanza	Differenza di potenziale fra preparato e rete								
	40	80	120	240	360	480	600	720	840
Ossido di rame	0,6	1	1,8	2,5	2,7	3	3,5	3	3
Cloruro rameoso	1		2	3	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5

La prima sostanza mantiene inalterata la propria sensibilità indefinitamente, la seconda invece no, alterandosi rapidamente all'aria e alla luce.

rame jodurato, e che sempre si otteneva un effetto maggiore allungando l'arco, cioè arricchendo la luce emessa da questo di radiazioni più rifrangibili. Anche per questi preparati si trova quindi un fatto analogo a quello riscontrato nelle ricerche di Scholl e Wilson ricordate in principio: l'effetto Hertz-Lenard è più grande per le radiazioni più rifrangibili, mentre, il massimo effetto Becquerel-Rigollot si ha per luci di rifrangibilità minore.

**Fisica terrestre.** — *Saggio di una nuova formola empirica per rappresentare il modo di variare della radiazione solare col variare dello spessore atmosferico attraversato dai raggi.* Nota I di A. BEMPORAD, presentata dal Corrispondente A. RICCÒ.

1. *Posizione della formola.* — Le più note formole empiriche proposte per rappresentare il modo di variare della intensità  $q$  della radiazione solare col variare dello spessore atmosferico  $\varepsilon$  attraversato dai raggi, come

- I. La formola di Pouillet:  $q = A_1 p^\varepsilon$                       ossia  $\log q = a_1 - b_1 \varepsilon$   
 II.        "        "    Crova :  $q = A_2 (1 + \varepsilon)^{-n}$         "         $\log q = a_2 - b_2 \log (1 + \varepsilon)$   
 III.        "        "    Bartoli :  $q = A_3 \varepsilon^{-m}$                 "         $\log q = a_3 - b_3 \log \varepsilon$ ,

dove le  $A, a, b, p, n, m$  denotano delle costanti, non raggiungono in generale il loro scopo, se non entro certi limiti per la distanza zenitale  $z$ . In prossimità dell'orizzonte, cioè appunto nella regione più interessante per esperienze sull'assorbimento atmosferico, tutte e tre le formole cadono generalmente in difetto, vale a dire si scostano dalla curva dei valori osservati di  $q$  molto più di quanto comporterebbero gli errori probabili delle osservazioni, e in modo del tutto sistematico. Questo fatto, da me già riconosciuto nell'applicazione delle dette formole alle osservazioni pireliometriche eseguite da Ångström all'isola di Teneriffa<sup>(1)</sup> e confermato da varie serie di osservazioni attinometriche da me eseguite negli Osservatori di Catania e dell'Etna, mi ha indotto a cercare, se qualcuna di queste formole potesse opportunamente modificarsi, in guisa da ottenere un più intimo accordo fra l'osservazione ed il calcolo, e dopo vari tentativi, prima con sviluppi per funzioni trigonometriche, poi con formole esponenziali, pervenni ad una formola, poco o niente più complicata delle tre precedenti, e che conduce ad una rappresentazione soddisfacentissima delle accennate osservazioni. La formola in discorso non differisce dalle precedenti, se non per la funzione dello spessore atmosferico  $\varepsilon$ , che si fa entrare nella espressione di  $\log q$ ; funzione, che, in luogo di essere senz'altro  $\varepsilon$  stessa (formola di Pouillet) o  $\log (1 + \varepsilon)$

<sup>(1)</sup> Ångström K., *Intensité de la radiation solaire à différentes altitudes*, Upsala 1900.

(formola di Crova) o  $\log \varepsilon$  (formola di Bartoli), è una conveniente potenza di  $\varepsilon$ . La formola proposta è dunque

$$\text{IV.} \quad q = Ap^{\varepsilon^n} \quad \text{ovvero} \quad \log q = a - b\varepsilon^n.$$

2. *Calcolo di  $\varepsilon$ .* — Come espressione dello spessore atmosferico  $\varepsilon$  in funzione della distanza zenitale  $z$  si suole assumere molto spesso nelle riduzioni delle osservazioni attinometriche la formola semplicissima

$$\varepsilon = \sec z$$

corrispondente all'ipotesi di strati atmosferici piani e paralleli, ma è chiaro a priori, che questa formola non può mai condurre ad una buona rappresentazione delle osservazioni attinometriche fatte a varie distanze zenitali, poichè, introdotta in una qualunque delle formole I, ... IV, conduce invariabilmente all'annullarsi della radiazione all'orizzonte, ciò che non accade certo in realtà.

Altri pongono con Laplace

$$\varepsilon = \frac{\text{Refr.}}{K \sin z}, \quad (K = 58'',36)$$

espressione corrispondente all'ipotesi di una temperatura costante per tutta l'atmosfera. Formole più approssimate vennero di recente <sup>(1)</sup> stabilite da me, nell'ipotesi di una diminuzione uniforme della temperatura dell'aria coll'altezza, di 6°,2 per km. Nel seguito ammetterò quindi che il valore di  $\varepsilon$  sia calcolato secondo queste formole rigorose, il cui impiego, mediante apposite tavole da me costruite, non è per nulla più complicato di quello delle formole precedenti <sup>(2)</sup>.

3. *Determinazione della costante  $n$  della formola IV e relativa tavola ausiliaria.* — Per  $n = 1$  la nostra formola IV viene naturalmente a coincidere colla formola I di Pouillet; ma per rappresentar bene le suaccennate osservazioni di Ångström e le nostre conviene prendere valori di  $n$  minori di 1 e in generale poco diversi da 0,7. Il valore più conveniente dell'esponente  $n$  per una data serie di osservazioni si può trovare in ogni caso per tentativi, ma è preferibile naturalmente stabilirsi qualche criterio semplice

<sup>(1)</sup> *Zur Theorie der Extinktion des Lichtes in der Erdatmosphäre.* Mitteil. der grossherz. Sternwarte zu Heidelberg (astrometr. Institut). Nr. IV, 1904. — *La teoria della estinzione atmosferica nella ipotesi di un decrescimento uniforme della temperatura dell'aria coll'altezza.* Mem. della Soc. degli Spettrosc. Ital. Vol. XXXIII, 1904.

<sup>(2)</sup> V. *Zur Theorie der Extinktion...* Tav. XXIII, pag. 66, ovvero: *L'assorbimento selettivo dell'atmosfera terrestre sulla luce degli astri.* Memorie della R. Accad. dei Lincei. Serie 5ª, vol. V a pag. 324 (tavola V). In ambedue i luoghi viene denotato con  $F(z)$  lo spessore atmosferico  $\varepsilon$  corrispondente alla distanza zenitale  $z$ .



per la scelta di questo valore, tanto più che una piccola variazione in  $n$  non porta una variazione notevole nella curva rappresentativa, se si determinano le costanti  $a, b$  col metodo dei minimi quadrati, e basta quindi limitarsi per il valore di  $n$  ad una, al più a due cifre significative. Il detto criterio può stabilirsi nel modo più semplice, eliminando le costanti  $a$  e  $b$  fra le equazioni IV corrispondenti a tre osservazioni eseguite a distanze zenitali molto diverse. Detti infatti  $q_1, q_2, q_3$  i valori della intensità della radiazione e  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  i valori degli spessori atmosferici corrispondenti a tre tali osservazioni, si avrà subito dalla detta eliminazione

$$(1) \quad \frac{\varepsilon_1^n - \varepsilon_2^n}{\varepsilon_2^n - \varepsilon_3^n} = \frac{\log q_2 - \log q_1}{\log q_3 - \log q_2},$$

da cui essendo note le  $\varepsilon$  e le  $q$ , si può ricavare  $n$ . Siccome però la risoluzione di questa equazione trascendente in  $n$  non potrebbe farsi che per successive approssimazioni, e, come abbiamo detto, anche una moderata approssimazione è sufficiente, così abbiamo cercato di agevolare questa risoluzione, calcolando i valori di  $\varepsilon^n$  per  $n = 0,9 \ 0,8 \ 0,7 \ 0,6 \ 0,5$  (raramente accade di oltrepassare questo limite), e disponendoli in una tabella, il cui uso apparirà chiaro dagli esempi numerici, che appresso seguiranno. Lo scopo della tabella è dunque anzitutto di agevolare la determinazione di  $n$  dall'equazione (1); ma la tabella stessa può anche fornire i valori di  $\varepsilon^n$  corrispondenti alle singole osservazioni, per la riduzione definitiva col metodo dei minimi quadrati, quando il valore prescelto per  $n$  sia uno di quelli compresi nella tavola. La limitazione delle cifre decimali a due sole (mentre le tavole accennate sopra per  $\varepsilon$  vanno fino alla terza decimale) non impedisce di rappresentare soddisfacentemente la curva della radiazione dall'orizzonte fino allo zenit, ed agevola naturalmente la interpolazione.

*TAVOLA di valori dello spessore atmosferico  $\varepsilon$  e delle potenze  $\varepsilon^{0,9}$   $\varepsilon^{0,8}$  ...  $\varepsilon^{0,5}$  corrispondenti a varie distanze zenitali  $z$  da  $0^\circ$  a  $90^\circ$ .*

$z$	$\varepsilon$	$\varepsilon^{0,9}$	$\varepsilon^{0,8}$	$\varepsilon^{0,7}$	$\varepsilon^{0,6}$	$\varepsilon^{0,5}$	$z$	$\varepsilon$	$\varepsilon^{0,9}$	$\varepsilon^{0,8}$	$\varepsilon^{0,7}$	$\varepsilon^{0,6}$	$\varepsilon^{0,5}$
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	54	1,70	1,61	1,53	1,45	1,37	1,30
10	1,02	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	55	1,74	1,65	1,56	1,47	1,39	1,32
15	1,04	1,03	1,03	1,02	1,02	1,02	56	1,78	1,69	1,59	1,50	1,42	1,34
20	1,06	1,06	1,05	1,05	1,04	1,03	57	1,83	1,72	1,62	1,53	1,44	1,35
21	1,07	1,06	1,06	1,05	1,04	1,03	58	1,88	1,77	1,66	1,56	1,46	1,37
22	1,08	1,07	1,06	1,05	1,05	1,04	59	1,94	1,81	1,70	1,59	1,49	1,39
23	1,09	1,08	1,07	1,06	1,05	1,04	60	2,00	1,86	1,74	1,62	1,52	1,41
24	1,09	1,08	1,07	1,06	1,06	1,05	61	2,06	1,91	1,78	1,66	1,54	1,43
25	1,10	1,09	1,08	1,07	1,06	1,05	62	2,12	1,97	1,82	1,69	1,57	1,46
26	1,11	1,10	1,09	1,08	1,07	1,05	63	2,19	2,03	1,88	1,73	1,60	1,48
27	1,12	1,11	1,10	1,08	1,07	1,06	64	2,27	2,09	1,93	1,78	1,64	1,51
28	1,13	1,12	1,10	1,09	1,08	1,06	65	2,36	2,16	1,99	1,82	1,67	1,54
29	1,14	1,13	1,11	1,10	1,08	1,07	66	2,45	2,24	2,05	1,87	1,71	1,56
30	1,15	1,14	1,12	1,11	1,09	1,07	67	2,55	2,32	2,11	1,92	1,75	1,60
31	1,17	1,15	1,13	1,11	1,10	1,08	68	2,65	2,41	2,18	1,98	1,80	1,63
32	1,18	1,16	1,14	1,12	1,10	1,09	69	2,77	2,50	2,26	2,04	1,84	1,66
33	1,19	1,17	1,15	1,13	1,11	1,09	70	2,90	2,61	2,35	2,11	1,90	1,70
34	1,20	1,18	1,16	1,14	1,12	1,10	71	3,05	2,73	2,44	2,18	1,95	1,75
35	1,22	1,20	1,17	1,15	1,13	1,10	72	3,21	2,86	2,54	2,26	2,01	1,79
36	1,23	1,21	1,18	1,16	1,14	1,11	73	3,39	3,00	2,65	2,35	2,08	1,84
37	1,25	1,22	1,20	1,17	1,14	1,12	74	3,59	3,16	2,78	2,44	2,15	1,89
38	1,27	1,24	1,21	1,18	1,15	1,13	75	3,82	3,33	2,92	2,55	2,23	1,95
39	1,28	1,25	1,22	1,19	1,16	1,13	75,1	3,84	3,36	2,93	2,56	2,24	1,96
40	1,30	1,27	1,24	1,20	1,17	1,14	75,2	3,86	3,38	2,95	2,58	2,25	1,97
41	1,32	1,29	1,25	1,22	1,18	1,15	75,3	3,89	3,40	2,96	2,59	2,26	1,97
42	1,34	1,30	1,27	1,23	1,19	1,16	75,4	3,91	3,42	2,98	2,60	2,27	1,98
43	1,37	1,32	1,28	1,24	1,21	1,17	75,5	3,94	3,44	3,00	2,61	2,28	1,99
44	1,39	1,34	1,30	1,26	1,22	1,18	75,6	3,97	3,46	3,01	2,62	2,29	1,99
45	1,41	1,37	1,32	1,27	1,23	1,19	75,7	3,99	3,48	3,03	2,64	2,29	2,00
46	1,44	1,39	1,34	1,29	1,24	1,20	75,8	4,02	3,50	3,04	2,65	2,30	2,00
47	1,46	1,41	1,36	1,31	1,26	1,21	75,9	4,05	3,52	3,06	2,66	2,31	2,01
48	1,49	1,43	1,38	1,32	1,27	1,22	76,0	4,07	3,54	3,08	2,67	2,32	2,02
49	1,52	1,46	1,40	1,34	1,29	1,23	76,1	4,10	3,56	3,09	2,69	2,33	2,03
50	1,55	1,49	1,42	1,36	1,30	1,25	76,2	4,13	3,58	3,11	2,70	2,34	2,03
51	1,59	1,52	1,45	1,38	1,32	1,26	76,3	4,16	3,61	3,13	2,71	2,35	2,04
52	1,62	1,54	1,47	1,40	1,34	1,27	76,4	4,19	3,63	3,14	2,73	2,36	2,05
53	1,66	1,58	1,50	1,43	1,35	1,29	76,5	4,22	3,65	3,16	2,74	2,37	2,05

*Continua Tavola di valori di  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^{0,9}$ ,  $\varepsilon^{0,8}$ , ...,  $\varepsilon^{0,5}$ .*

$z$	$\varepsilon$	$\varepsilon^{0,9}$	$\varepsilon^{0,8}$	$\varepsilon^{0,7}$	$\varepsilon^{0,6}$	$\varepsilon^{0,5}$	$z$	$\varepsilon$	$\varepsilon^{0,9}$	$\varepsilon^{0,8}$	$\varepsilon^{0,7}$	$\varepsilon^{0,6}$	$\varepsilon^{0,5}$
76,6	4,25	3,68	3,18	2,75	2,38	2,06	80,4	5,82	4,88	4,09	3,43	2,88	2,41
76,7	4,28	3,70	3,20	2,77	2,39	2,07	80,5	5,87	4,92	4,12	3,45	2,89	2,42
76,8	4,31	3,72	3,22	2,78	2,40	2,08	80,6	5,93	4,96	4,15	3,48	2,91	2,44
76,9	4,34	3,75	3,24	2,79	2,41	2,08	80,7	5,99	5,01	4,19	3,50	2,93	2,45
77,0	4,37	3,77	3,25	2,81	2,42	2,09	80,8	6,05	5,06	4,22	3,53	2,95	2,46
77,1	4,40	3,80	3,27	2,82	2,43	2,10	80,9	6,11	5,10	4,26	3,55	2,96	2,47
77,2	4,44	3,82	3,29	2,84	2,44	2,11	81,0	6,18	5,15	4,29	3,58	2,98	2,49
77,3	4,47	3,85	3,31	2,85	2,46	2,11	81,1	6,24	5,20	4,33	3,60	3,00	2,50
77,4	4,50	3,87	3,33	2,87	2,47	2,12	81,2	6,31	5,25	4,36	3,63	3,02	2,51
77,5	4,54	3,90	3,35	2,88	2,48	2,13	81,3	6,37	5,30	4,40	3,66	3,04	2,52
77,6	4,57	3,93	3,37	2,90	2,49	2,14	81,4	6,44	5,35	4,44	3,68	3,06	2,54
77,7	4,61	3,96	3,39	2,91	2,50	2,15	81,5	6,51	5,40	4,48	3,71	3,08	2,55
77,8	4,64	3,98	3,42	2,93	2,51	2,16	81,6	6,58	5,45	4,52	3,74	3,10	2,57
77,9	4,68	4,01	3,44	2,94	2,52	2,16	81,7	6,66	5,51	4,56	3,77	3,12	2,58
78,0	4,72	4,04	3,46	2,96	2,54	2,17	81,8	6,73	5,56	4,60	3,80	3,14	2,59
78,1	4,75	4,07	3,48	2,98	2,55	2,18	81,9	6,81	5,62	4,64	3,83	3,16	2,61
78,2	4,79	4,09	3,50	2,99	2,56	2,19	82,0	6,88	5,68	4,68	3,86	3,18	2,62
78,3	4,83	4,13	3,53	3,01	2,57	2,20	82,1	6,96	5,73	4,72	3,89	3,20	2,64
78,4	4,87	4,16	3,55	3,03	2,58	2,21	82,2	7,04	5,79	4,77	3,92	3,22	2,65
78,5	4,91	4,19	3,57	3,05	2,60	2,22	82,3	7,13	5,86	4,81	3,95	3,25	2,67
78,6	4,95	4,22	3,60	3,06	2,61	2,22	82,4	7,21	5,92	4,86	3,99	3,27	2,69
78,7	4,99	4,25	3,62	3,08	2,62	2,23	82,5	7,30	5,98	4,90	4,02	3,30	2,70
78,8	5,03	4,28	3,64	3,10	2,64	2,24	82,6	7,39	6,05	4,95	4,06	3,32	2,72
78,9	5,08	4,32	3,67	3,12	2,65	2,25	82,7	7,48	6,12	5,00	4,09	3,35	2,73
79,0	5,12	4,35	3,69	3,14	2,66	2,26	82,8	7,57	6,19	5,05	4,13	3,37	2,75
79,1	5,16	4,38	3,72	3,16	2,68	2,27	82,9	7,67	6,26	5,10	4,16	3,40	2,77
79,2	5,21	4,42	3,75	3,18	2,69	2,28	83,0	7,77	6,33	5,16	4,20	3,42	2,79
79,3	5,26	4,45	3,77	3,20	2,71	2,29	83,1	7,87	6,40	5,21	4,24	3,45	2,80
79,4	5,30	4,49	3,80	3,22	2,72	2,30	83,2	7,97	6,48	5,26	4,28	3,47	2,82
79,5	5,35	4,53	3,83	3,24	2,74	2,31	83,3	8,08	6,55	5,32	4,32	3,50	2,84
79,6	5,40	4,56	3,85	3,26	2,75	2,32	83,4	8,19	6,63	5,38	4,36	3,53	2,86
79,7	5,45	4,60	3,88	3,28	2,76	2,33	83,5	8,30	6,72	5,44	4,40	3,56	2,88
79,8	5,50	4,64	3,91	3,30	2,78	2,34	83,6	8,41	6,80	5,49	4,44	3,59	2,90
79,9	5,55	4,68	3,94	3,32	2,80	2,36	83,7	8,53	6,88	5,56	4,48	3,62	2,92
80,0	5,60	4,71	3,98	3,34	2,81	2,37	83,8	8,65	6,97	5,62	4,53	3,65	2,94
80,1	5,65	4,75	4,00	3,36	2,83	2,38	83,9	8,77	7,06	5,68	4,57	3,68	2,96
80,2	5,70	4,80	4,03	3,39	2,84	2,39	84,0	8,90	7,15	5,75	4,62	3,71	2,98
80,3	5,76	4,84	4,06	3,41	2,86	2,40	84,1	9,03	7,25	5,82	4,67	3,75	3,01



*Continua Tavola di valori  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^{0,9}$ ,  $\varepsilon^{0,8}$ , ...,  $\varepsilon^{0,5}$ .*

$z$	$\varepsilon$	$\varepsilon^{0,9}$	$\varepsilon^{0,8}$	$\varepsilon^{0,7}$	$\varepsilon^{0,6}$	$\varepsilon^{0,5}$
84,2	9,17	7,34	5,89	4,72	3,78	3,03
84,3	9,30	7,44	5,96	4,76	3,81	3,05
84,4	9,45	8,55	6,03	4,82	3,85	3,07
84,5	9,59	7,65	6,10	4,87	3,88	3,10
84,6	9,74	7,76	6,18	4,92	3,92	3,12
84,7	9,90	7,87	6,26	4,98	3,96	3,15
84,8	10,06	7,99	6,34	5,03	3,99	3,17
84,9	10,22	8,10	6,42	5,09	4,03	3,20
85,0	10,39	8,23	6,51	5,15	4,07	3,22
85,1	10,57	8,35	6,60	5,21	4,12	3,25
85,2	10,75	8,48	6,69	5,27	4,16	3,28
85,3	10,94	8,61	6,78	5,34	4,20	3,31
85,4	11,13	8,75	6,88	5,40	4,25	3,34
85,5	11,33	8,89	6,97	5,47	4,29	3,37
85,6	11,54	9,04	7,08	5,54	4,34	3,40
85,7	11,75	9,19	7,18	5,61	4,39	3,43
85,8	11,97	9,34	7,29	5,69	4,44	3,46
85,9	12,20	9,50	7,40	5,76	4,49	3,49
86,0	12,44	9,67	7,51	5,84	4,54	3,53
86,1	12,68	9,84	7,63	5,92	4,59	3,56
86,2	12,94	10,02	7,75	6,00	4,65	3,60
86,3	13,20	10,20	7,88	6,09	4,70	3,63
86,4	13,48	10,39	8,01	6,18	4,76	3,67
86,5	13,76	10,59	8,15	6,27	4,82	3,71
86,6	14,06	10,79	8,29	6,36	4,88	3,75
86,7	14,37	11,01	8,43	6,46	4,95	3,79
86,8	14,69	11,23	8,58	6,56	5,01	3,83
86,9	15,02	11,45	8,74	6,66	5,08	3,88
87,0	15,36	11,69	8,90	6,77	5,15	3,92
87,1	15,72	11,94	9,06	6,88	5,22	3,97

$z$	$\varepsilon$	$\varepsilon^{0,9}$	$\varepsilon^{0,8}$	$\varepsilon^{0,7}$	$\varepsilon^{0,6}$	$\varepsilon^{0,5}$
87,2	16,10	12,20	9,24	6,99	5,30	4,01
87,3	16,49	12,46	9,42	7,11	5,38	4,06
87,4	16,90	12,74	9,60	7,24	5,46	4,11
87,5	17,33	13,03	9,80	7,36	5,54	4,16
87,6	17,78	13,33	10,00	7,50	5,62	4,22
87,7	18,25	13,65	10,21	7,64	5,71	4,27
87,8	18,74	13,98	10,43	7,78	5,80	4,33
87,9	19,25	14,32	10,65	7,93	5,90	4,39
88,0	19,79	14,68	10,89	8,08	6,00	4,45
88,1	20,35	15,06	11,14	8,24	6,10	4,51
88,2	20,94	15,45	11,40	8,41	6,20	4,58
88,3	21,57	15,86	11,67	8,58	6,31	4,64
88,4	22,22	16,29	11,95	8,76	6,43	4,71
88,5	22,91	16,75	12,25	8,95	6,55	4,79
88,6	23,63	17,22	12,55	9,15	6,67	4,86
88,7	24,40	17,73	12,88	9,36	6,80	4,94
88,8	25,20	18,25	13,22	9,57	6,93	5,02
88,9	26,06	18,81	13,57	9,80	7,07	5,10
89,0	26,96	19,39	13,95	10,03	7,22	5,19
89,1	27,90	20,00	14,34	10,28	7,37	5,28
89,2	28,91	20,65	14,75	10,54	7,53	5,38
89,3	29,99	21,34	15,19	10,81	7,69	5,48
89,4	31,13	22,07	15,65	11,10	7,87	5,58
89,5	32,33	22,84	16,13	11,40	8,05	5,69
89,6	33,61	23,15	16,64	11,71	8,24	5,80
89,7	34,98	24,52	17,18	12,04	8,44	5,91
89,8	36,44	25,43	17,75	12,39	8,65	6,04
89,9	37,99	26,41	18,36	12,76	8,87	6,16
90,0	39,65	27,44	18,99	13,15	9,10	6,30

Chimica. — *Contributo alla conoscenza dell'argento bivalente* <sup>(1)</sup>. Nota di G. A. BARBIERI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Da molto tempo è noto che l'argento oltre all'ossido  $\text{Ag}_2\text{O}$  può dare origine a un ossido  $\text{AgO}$ . Tuttavia i sali di argento finora preparati appartengono esclusivamente al tipo  $\text{AgX}$ . Nei trattati l' $\text{AgO}$  viene descritto come un perossido non salificabile.

Anche Mendeleef considerò l'ossido  $\text{AgO}$  come un composto analogo al perossido di sodio  $\text{Na}_2\text{O}_2$  <sup>(2)</sup>.

Io ho dimostrato in una Nota <sup>(3)</sup> pubblicata nello scorso anno che il così detto perossido-nitrato di argento  $\text{Ag}_7\text{NO}_{11}$  che si ha per via elettrolitica e che con acqua si scompone in  $\text{AgNO}_3$ ,  $\text{AgO}$  e  $\text{O}$ , non è un composto del tipo dell' $\text{H}_2\text{O}_2$  e inoltre ho descritto la preparazione di alcuni composti complessi ottenibili allo stato di soluzione e contenenti l'argento in una forma di combinazione superiore alla monovalente.

Nella presente nota sono riferite le ricerche da me istituite in seguito sopra uno di tali composti, sull'ossido  $\text{AgO}$  e sui sali che ne derivano. I risultati da me ottenuti non mi sembrano senza interesse e spingeranno, spero, altri cultori della chimica inorganica, a occuparsi delle forme superiori di combinazione dell'argento finora quasi completamente ignorate.

#### 1. Ossidazione del pirofosfato di argento per mezzo del persolfato potassico.

Questa ossidazione venne descritta sommariamente nella Nota su ricordata. Le esperienze ulteriori furono eseguite collo scopo di precisare meglio le condizioni nelle quali detta ossidazione si produce e d'investigare la natura del composto al quale essa dà origine.

È noto che il pirofosfato di argento è un precipitato bianco insolubile nell'acqua ma un po' solubile in presenza di un grande eccesso di pirofosfato alcalino <sup>(4)</sup>. A 100 cc. di una soluzione di pirofosfato sodico satura a 30° (contenente circa 20 gr. di  $\text{Na}_4\text{P}_2\text{O}_7 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ ) si possono aggiungere cc. 12 di una soluzione all'1 % di  $\text{AgNO}_3$  prima che si formi un intorbidamento persistente in seno al liquido. Io ho osservato che se si aggiungono a questo liquido torbido 3 o 4 gr. di persolfato potassico si producono i seguenti fenomeni: 1° la soluzione assume in pochi minuti e a freddo un'intensa

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della L. Università di Ferrara.

<sup>(2)</sup> Principes de Chimie, tome II, 458.

<sup>(3)</sup> Rend. Acc. Lincei, XV, 503 (1906).

<sup>(4)</sup> Wurtz, Dictionnaire de Chimie, 1868, Tom. I, pag. 372.

colorazione rossa; 2° l'intorbidamento scompare; 3° alla soluzione intensamente colorata e limpida si possono aggiungere ancora 40 cc. della soluzione all'1 % di  $\text{AgNO}_3$  prima che si formi un nuovo intorbidamento persistente.

La presenza di tracce di composti organici o ammoniacali nel pirofosfato o nel persolfato ritarda sensibilmente la comparsa della colorazione rossa in quanto che tali impurità agiscono come riducenti sul composto rosso decolorandolo. Bisogna in tal caso operare a 60°: così i composti organici e ammoniacali vengono rapidamente ossidati dal persolfato potassico. Si comprende che a maggior ragione non si può impiegare in luogo del persolfato di potassio il persolfato di ammonio.

A che deve attribuirsi l'intensa colorazione rossa che sotto l'azione del persolfato potassico assumono le soluzioni di pirofosfato di argento in pirofosfato sodico? Siccome alcune soluzioni colloidali di argento sono colorate intensamente in rosso <sup>(1)</sup>, si potrebbe supporre che le soluzioni rosse ottenute col persolfato presentassero con esse qualche analogia.

Ma tutto il loro comportamento sta contro tale supposizione. Le soluzioni preparate con persolfato non sono colloidali perchè attraversano la carta pergamena, perchè non vengono coagulate dagli elettroliti e perchè possono venir agitate con solfato di bario di recente precipitato senza subire alcuna alterazione (prova di Vanino) <sup>(2)</sup>. Esse presentano inoltre tutte le reazioni del così detto perossido di argento: vengono istantaneamente ridotte e decolorate dall'acqua ossigenata con sviluppo di ossigeno, dall'ammoniaca con sviluppo di azoto: ossidano i sali cerosi a cerici, i cobaltosi a cobaltici, i manganosi a sali dell'acido permanganico. Anche il fatto che la solubilità del pirofosfato di argento in pirofosfato sodico — solubilità che denota la formazione di un jone complesso <sup>(3)</sup> — viene aumentata in modo rilevante sotto l'azione del persolfato, sta a provare che quest'ultimo agisce come ossidante e che l'argento viene portato ad una forma superiore di combinazione nella quale possedendo minor elettro-affinità — come accade per tutti i metalli che possiedono più forme di combinazione <sup>(4)</sup> — acquista maggior tendenza a entrare a far parte di joni complessi.

L'isolamento del composto che si forma in causa dell'ossidazione non è praticamente possibile perchè tale composto non è stabile che in presenza di un grande eccesso di pirofosfato alcalino.

Anche la determinazione del grado di ossidazione che in esso raggiunge l'argento presenta notevoli difficoltà in causa del persolfato presente nella soluzione. Io ho cercato tuttavia di determinare il rapporto  $\frac{\text{Ag}}{\text{O attivo}}$  nel

<sup>(1)</sup> Muthmann, *Per.* 20, 983; Bredig, *Z. f. angew. Ch.* 1898, 951.

<sup>(2)</sup> L. Vanino, *Ber.* 35, 662; F. W. Küster, G. Dahmer, *Z. f. anorg. Ch.*, 34, 410.

<sup>(3)</sup> W. Nernst, *Theoretische Chemie*, 2 Aufl. 497.

<sup>(4)</sup> R. Abegg, G. Bodländer, *Z. f. anorg. Ch.*, 20, 482.



composto formatosi nell'ossidazione misurando la quantità di acqua ossigenata che bisognava aggiungere a soluzioni rosse di contenuto noto in argento per decolorarle completamente. L'aggiunta dell'acqua ossigenata veniva eseguita colla massima rapidità possibile, perchè il persolfato riossida abbastanza rapidamente il composto di argento man mano che si riduce. Questa riossidazione permette d'altra parte di eseguire più determinazioni sulla stessa soluzione e quindi di scegliere tra i risultati errati per eccesso e quelli errati per difetto i valori medî più prossimi al vero.

L'ossigeno attivo combinato coll'argento si calcolò dall'acqua ossigenata consumata, ammettendo che in questa reazione — come in tutte le reazioni nelle quali l' $\text{H}_2\text{O}_2$  agisce come riducente — per ogni atomo di ossigeno attivo dell'acqua ossigenata si liberi un atomo di ossigeno attivo del composto che vien ridotto. Le titolazioni vennero eseguite con una soluzione di acqua ossigenata contenente gr. 4,9 di  $\text{H}_2\text{O}_2$  per litro.

Ecco i risultati di alcune esperienze:

- I. Una soluzione preparata con 100 cc. di acqua, 20 gr. di pirofosfato sodico, 4 gr. di persolfato potassico e 30 cc. di una soluzione all'1 % di nitrato di argento richiese, per venir decolorata, cc. 6 della soluzione di acqua ossigenata:

$$\frac{\text{Ag}}{\text{O attivo}} = \frac{0,1905}{0,0138} = 13,78.$$

- II. Una soluzione preparata con 250 cc. di acqua, 40 gr. di pirofosfato sodico, 5 gr. di persolfato potassico e 50 gr. della soluzione di  $\text{AgNO}_3$  all'1 % consumò in media per venir decolorata cc. 10, 5 della soluz. di acqua ossigenata:

$$\frac{\text{Ag}}{\text{O attivo}} = \frac{0,3175}{0,0242} = 13,12.$$

- III. Una soluzione preparata con 50 cc. di acqua, 10 gr. di pirofosfato sodico, 2 gr. di persolfato potassico e 20 cc. della soluzione all'1 % di nitrato di argento consumò in media per venir decolorata cc. 3,7 della soluzione di acqua ossigenata:

$$\frac{\text{Ag}}{\text{O attivo}} = \frac{0,127}{0,008528} = 14,89.$$

Il calcolato per il rapporto  $\frac{\text{Ag}}{\text{O attivo}}$  nell'ipotesi che il composto formatosi per azione del persolfato potassico corrisponda all'ossido  $\text{AgO}$  è  $= \frac{\text{Ag}_2}{\text{O}} = \frac{215,868}{16} = 13,5$ , mentre nell'ipotesi che il composto corrispondesse all'ossido  $\text{Ag}_2\text{O}_3$  sarebbe  $= \frac{\text{Ag}}{\text{O}} = \frac{107,934}{16} = 6,75$ .

I valori trovati sperimentalmente stanno a provare che per azione del persolfato potassico sulla soluzione del pirofosfato di argento in pirofosfato sodico si ottiene un composto dell'argento bivalente. Questo risultato concorda coll'interpretazione data da Marshall (1) alla reazione tra persolfato potassico e nitrato di argento. Secondo Marshall si forma dapprima per doppio scambio persolfato di argento che si decompone poi per azione dell'acqua secondo l'equazione:



## II. Ossidazione dell'Ag<sub>2</sub>O con permanganato potassico.

L'esistenza di un composto salino corrispondente all'ossido AgO non basterebbe a dimostrare che quest'ultimo non è un vero perossido giacchè si conoscono molti perossidi salificabili.

Il comportamento caratteristico che serve a riconoscere i veri perossidi consiste invece secondo Piccini (2), nell'azione riducente ch'essi manifestano in soluzione acida sopra alcuni composti molto ricchi di ossigeno. Secondo Mendeleeff (3) veri perossidi sono quelli che possono dare origine ad acqua ossigenata.

Ripetendo sull'ossido AgO preparato in tutti i modi finora noti — col l'ozono, per elettrolisi, con persolfato di potassio — le prove da me eseguite sull'Ag<sub>7</sub>NO<sub>11</sub> ho potuto constatare che anche l'AgO in soluzione nell'acido nitrico concentrato non agisce come riducente sul PbO<sub>2</sub>, sul MnO<sub>2</sub> e sul KMnO<sub>4</sub>.

L'AgO introdotto in una soluzione solforica di acido titanico vi si scioglie senza produrvi alcuna colorazione.

Se la soluzione di acido titanico è stata previamente addizionata con un po' di acqua ossigenata, l'aggiunta di AgO ne fa scomparire istantaneamente la colorazione rosso-aranciata.

Dunque l'AgO contrariamente all'opinione di Mendeleeff, non è un ossido del tipo dell'acqua ossigenata, ma un ozonide, come già l'aveva ritenuto Schönbein (4).

Una conferma di ciò si ha inoltre dalla seguente nuova reazione: l'Ag<sub>2</sub>O trattato con permanganato potassico in soluzione alcalina viene parzialmente ossidato ad AgO.

Si può eseguire l'esperienza aggiungendo ad una soluzione di 5 gr. di AgNO<sub>3</sub> in 100 cc. di acqua, gr. 10 di KMnO<sub>4</sub> e gr. 30 di NaOH e poi scaldando a bagno maria per circa un'ora. Il precipitato formatosi viene sepa-

(1) Proc. R. Soc. Edinb. 23, 162.

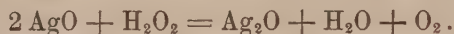
(2) Z. f. anorg. Ch., 12, 180.

(3) Loc. cit.

(4) Wurtz, Dictionnaire de Chimie, tom. I, 366.

rato per decantazione dal liquido alcalino violetto e viene lavato ripetutamente prima con soluzione di soda caustica al 10 %, poi con acqua distillata. Si ottiene così una polvere nera e fine che differisce per il colore e per le proprietà chimiche dall'Ag<sub>2</sub>O. Essa si scioglie nell'acido nitrico concentrato con intensa colorazione bruna, con acido cloridrico dà cloruro di argento e cloro: presenta insomma tutte le reazioni dell'AgO.

L'analisi di questa polvere nera venne eseguita introducendone una quantità indeterminata nell'acido nitrico diluito, previamente addizionato di un volume noto di una soluzione titolata di acqua ossigenata: l'AgO reagisce, com'è noto, coll'acqua ossigenata in soluzione acida secondo l'equazione:



L'eccesso dell'acqua ossigenata veniva determinato col permanganato potassico e quindi si dosava l'argento col solfo-cianuro di ammonio secondo Volhard. Eseguendo l'ossidazione nelle condizioni su descritte si trovò che il 30 % dell'Ag<sub>2</sub>O veniva trasformato in AgO: operando a freddo soltanto il 10-15 % subiva l'ossidazione.

L'ossidazione dell'Ag<sub>2</sub>O per azione del permanganato dipende evidentemente dalla tendenza che ha quest'ultimo in soluzione alcalina a trasformarsi in manganato. Io ho constatato infatti che il manganato potassico (ottenuto fondendo insieme permanganato e idrato di potassio) non agisce come ossidante sull'Ag<sub>2</sub>O. L'ossidazione dell'Ag<sub>2</sub>O con KMnO<sub>4</sub> in presenza di NaOH può dunque venir rappresentata dall'equazione:



Questa reazione è reversibile. Se si scalda una soluzione diluita di manganato in soda caustica al 30 % con dell'AgO si osserva che a poco a poco il color verde della soluzione volge al turchino: per diluizione compare tosto il colore violetto del permanganato. L'azione ossidante che l'AgO esercita sul K<sub>2</sub>MnO<sub>4</sub> spiega perchè l'ossidazione dell'Ag<sub>2</sub>O con KMnO<sub>4</sub> non è quantitativa.

### III. *Comportamento dell'AgO cogli acidi.*

Riguardo al comportamento dell'AgO cogli acidi si trovano nella letteratura poche notizie e contraddittorie. Secondo alcuni l'AgO sciogliendosi negli acidi dà sali del tipo AgX e ossigeno ozonizzato (<sup>1</sup>), secondo altri l'AgO si scioglie nell'acido nitrico concentrato senza riduzione (<sup>2</sup>).

Io ho osservato che le soluzioni molto diluite degli acidi deboli non attaccano l'AgO — specialmente a freddo — che con estrema lentezza. Ho

(<sup>1</sup>) Wurtz, Dictionaire de Chimie, vol. I, 666.

(<sup>2</sup>) Fischer, J. pr., 32, 108.



approfittato di questo fatto per estrarre dall'ossido preparato col  $\text{KMnO}_4$ , la maggior parte dell' $\text{Ag}_2\text{O}$  che conteneva. L'ossido venne lavato ripetutamente in una capsula di platino con soluzione all'1 % di acido fluoridrico raffreddato a  $0^\circ$ . In tal modo da un ossido contenente 30 % di  $\text{AgO}$  potei ottenere un ossido contenente il 95 % di  $\text{AgO}$ .

Nelle soluzioni al 3 % di acido nitrico, l' $\text{AgO}$  si scioglie rapidamente a temperatura ordinaria, più lentamente a  $0^\circ$ , con forte sviluppo di ossigeno ozonizzato e formando soluzioni incolori. Nell'acido nitrico concentrato ( $d = 1,4$ ) si scioglie — com'è noto — con intensa colorazione nero-seppia.

Determinando il valore del rapporto  $\frac{\text{Ag}}{\text{O attivo}}$  nell'ossido e nella sua soluzione in acido nitrico concentrato ho potuto constatare che circa il 50 % dell'argento bivalente si riduce a monovalente nell'atto della soluzione. Operando a  $-10^\circ$  la riduzione è minore. Le soluzioni nero-seppia abbandonate a sè a temperatura ordinaria, si riducono lentamente: a freddo e specialmente se contengono un grande eccesso di nitrato di calcio o di un altro nitrato molto solubile, sono più stabili. Si riducono assai rapidamente se vengono addizionate con acqua. Se invece si versa improvvisamente una soluzione concentrata di  $\text{AgO}$  in acido nitrico in un grande volume di acqua fredda si osserva dapprima la formazione di un precipitato nero di  $\text{AgO}$  che poi si ridiscioglie, con riduzione completa, nell'acido nitrico diluito.

L' $\text{AgO}$  è più solubile dell' $\text{Ag}_2\text{O}$  nell'acido nitrico concentrato, così che si può da una soluzione concentrata di  $\text{AgO}$  in acido nitrico ( $d = 1,4$ ) ottenere per riduzione una soluzione satura di  $\text{AgNO}_3$  contenente cioè un deposito cristallino di nitrato di argento.

Da tutti questi fatti si possono trarre, a mio parere, le seguenti conclusioni:

1° L' $\text{AgO}$  è una base più debole dell' $\text{Ag}_2\text{O}$ .

2° Le sue soluzioni in acido nitrico concentrato contengono il sale  $\text{Ag}(\text{NO}_3)_2$  facilmente idrolizzabile.

3° Il jone  $\text{Ag}^{++}$  è abbastanza stabile soltanto in presenza di un grande eccesso di anioni  $\text{NO}_3$  coi quali probabilmente forma anioni complessi: allo stato libero decompone l'acqua analogamente ai joni  $\text{Co}^{+++}$ ,  $\text{Ce}^{++++}$ , ecc.

#### IV. Ossidazione dell' $\text{AgNO}_3$ in soluzione nitrica per mezzo di $\text{PbO}_2$ e di $\text{Bi}_2\text{O}_4$ .

La credenza che l'argento non possedesse che una sola forma di concentrazione è stata sempre così generale e radicata che nessuno si è mai proposto di sperimentare l'azione degli ossidanti sui sali di argento. Soltanto incidentalmente venne osservato che nell'elettrolisi del nitrato di argento si ha all'anodo l'ossidazione di questo composto<sup>(1)</sup>, ma l'osservazione rimase isolata e non provocò altre ricerche.

(1) Tanatar, Z. f. anorg. Ch., 28, 333 (1901).

Avendo constatato che il jone  $\text{Ag}^{\cdot\cdot}$  analogamente al jone  $\text{Ce}^{\cdot\cdot\cdot}$  è abbastanza stabile in presenza di un grande eccesso di joni  $\text{NO}_3'$ , pensai di tentare l'ossidazione del jone  $\text{Ag}^{\cdot}$  a jone  $\text{Ag}^{\cdot\cdot}$  in soluzione fortemente nitrica per mezzo degli stessi ossidanti ( $\text{PbO}_2$  <sup>(1)</sup>,  $\text{Bi}_2\text{O}_4$ ) <sup>(2)</sup>, che trasformano il jone  $\text{Ce}^{\cdot\cdot}$  a jone  $\text{Ce}^{\cdot\cdot\cdot}$ . Alcune esperienze eseguite in proposito mi condussero all'interessante risultato che il nitrato di argento in soluzione nitrica agisce sul  $\text{PbO}_2$  e sul  $\text{Bi}_2\text{O}_4$  *come un riducente*. Quando si introduce un po' di  $\text{PbO}_2$  in una soluzione di  $\text{AgNO}_3$  (per es. al 5 %) in acido nitrico concentrato, si osserva tosto che la soluzione assume un'intensa colorazione bruna e il  $\text{PbO}_2$  passa in soluzione come  $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$ . La soluzione che si ottiene ricorda perfettamente per il colore le soluzioni di  $\text{AgO}$  in acido nitrico e ne possiede tutte le proprietà: ossida i sali manganosi ad acido permanganico, i sali di cromo ad acido cromico: viene istantaneamente ridotta dall'acqua ossigenata e dai sali ammoniaci. È logico quindi ammettere che il  $\text{PbO}_2$  abbia ossidato almeno in parte l' $\text{AgNO}_3$  ad  $\text{Ag}(\text{NO}_3)_2$ . L'ossidazione è assai più rapida se in luogo di  $\text{PbO}_2$  si impiega il  $\text{Bi}_2\text{O}_4$  che più facilmente del  $\text{PbO}_2$  viene attaccato dall'acido nitrico.

Il colore del composto dell'argento bivalente che si forma è così intenso che si avverte anche se si impiegano soluzioni di  $\text{AgNO}_3$  estremamente diluite.

Ho determinato in alcune soluzioni di  $\text{AgNO}_3$  ossidate con  $\text{Bi}_2\text{O}_4$  il rapporto  $\frac{\text{Ag}}{\text{O attivo}}$  nel modo su indicato per l' $\text{AgO}$ .

Le esperienze vennero eseguite sopra soluzioni all'1 % di  $\text{AgNO}_3$  in acido nitrico ( $d = 1,4$ ) raffreddate a  $-10^\circ$  e diedero come risultato che fino il 90 % dell' $\text{AgNO}_3$  contenuto nelle soluzioni può venir ossidato ad  $\text{Ag}(\text{NO}_3)_2$ . A temperatura ordinaria l'ossidazione è minore.

### V. Proprietà catalitiche dei sali di argento.

Dalla capacità che possiedono i sali di argento di venir ossidati in soluzione nitrica dal  $\text{PbO}_2$  e dal  $\text{Bi}_2\text{O}_4$  dipende l'azione accelerante che, secondo alcune mie esperienze, essi possono manifestare in certe ossidazioni.

È noto che il  $\text{PbO}_2$  in presenza di acido nitrico concentrato ossida a caldo i sali manganosi ad acido permanganico. Se si opera a freddo e con acido nitrico diluito la reazione avviene con estrema lentezza. Io ho constatato che l'ossidazione avviene istantaneamente anche a freddo e con acido nitrico diluito ( $d = 1,1$ ), se si aggiungono alcune gocce di una soluzione (al 10 %) di nitrato di argento. Evidentemente il nitrato di argento esercita in questo caso la stessa azione che manifesta il nitrato ceroso nell'ossida-

(1) Job. C. r., 128, 101.

(2) Wäagner, Müller, Ber., 36, 282.

zione dell'acido ossalico per mezzo dell'acido nitrico <sup>(1)</sup>: fa cioè da trasportatore di ossigeno. Esso viene ossidato a freddo dal PbO<sub>2</sub> ad Ag(NO<sub>3</sub>)<sub>2</sub> e questo ossida rapidamente e a freddo il sale manganoso ad acido permanganico.

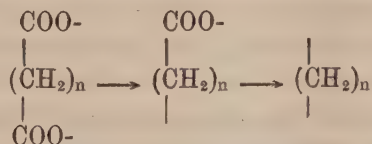
Un fenomeno perfettamente analogo si ha nell'ossidazione dei sali di cromo ad acido cromico per mezzo del Bi<sub>2</sub>O<sub>4</sub> e dell'acido nitrico concentrato. A freddo la reazione è molto lenta. Io ho osservato ch'essa viene notevolmente accelerata dall'aggiunta di nitrato di argento.

**Chimica.** — *Decomposizione elettrolitica di acidi organici bicarbossilici. Acido suberico.* Nota del dott. B. L. VANZETTI, presentata dal Socio G. KOERNER <sup>(2)</sup>.

Fu esposto altra volta il risultato di alcune esperienze di elettrolisi eseguite sopra gli acidi bicarbossilici a più di quattro atomi di carbonio <sup>(3)</sup>.

Scopo principale di queste ricerche è quello di seguire passo passo le reazioni cui va incontro quella parte di molecola organica, che, arrivata all'anodo e depostavi la sua carica, o le sue cariche negative, si viene a trovare in uno stato di labilità, il quale è causa di una serie di reazioni secondarie, alcune delle quali si possono anche prevedere, mentre alcune altre sono di natura assai complicata. Si tratta però sempre, come già lo stesso Kekulé aveva bene interpretato per reazioni analoghe, e come oggi nel contenuto della teoria della dissociazione elettrolitica è chiaramente espresso, di reazioni secondarie.

Per gli acidi bicarbossilici della serie ossalica a catena normale avviene dunque che l'anione bicarbonico, decomponendosi all'anodo per la perdita simultanea o successiva dei due gruppi -COO-, mette in libertà un residuo a carattere di idrocarburo, che trovandosi per un istante ad avere delle valenze libere



possiede una grande instabilità e, conseguentemente, una grande capacità di reazione. E poichè la produzione di questi residui avviene nello spazio anodico, in contatto con l'anodo sul quale si sono prodotti, e sul quale si sviluppa contemporaneamente una certa quantità di ossigeno allo stato nascente,

<sup>(1)</sup> G. A. Barbieri, A. Volpino, Rend. R. Accad. Lincei, XVI, 399 1° sem. 1907.

<sup>(2)</sup> Lavoro eseguito nel Laboratorio di chim. organica della R. Scuola sup. di Agricoltura di Milano.

<sup>(3)</sup> *Elettrolisi dell'acido glutarico*, R. Acc. Lincei, vol. XIII, 2° sem., f. 2, 1904; *Elettrolisi dell'acido adipico*, R. Acc. Lincei, vol. XV, 1° sem., f. 10, 1906.



è naturale che essi, già prima che il loro complesso atomico assuma un aspetto di stabilità definitiva, si trovino esposti all'azione di questo ossigeno e solo difficilmente possano sottrarvisi. Ora dalle presenti esperienze risulta che quanto più è lunga la catena carbonica che forma l'anione e tanto più difficilmente essa sfugge alle azioni secondarie, ed in particolare all'azione dell'ossigeno anodico.

Noi sappiamo infatti come la facile decomposizione elettrolitica dei termini inferiori della serie ossalica conduca alla formazione di idrocarburi, i quali si sviluppano in quantità notevole ed abbiamo constatato anche, che crescendo in lunghezza la catena carbonica, questi idrocarburi vengono a mancare e le reazioni si rendono sempre più complesse; di guisa che difficilmente si riesce a separare ed identificare i singoli prodotti che ne risultano.

Infatti, se l'acido succinico si decompone con un buon rendimento di idrocarburo non saturo (etilene), l'acido glutarico dà, già stentatamente, piccole quantità di propilene ordinario (anzichè trimetilene come potrebbe aspettarsi) <sup>(1)</sup> e l'acido adipico fornisce quantità ancora minori, dei due butileni a catena normale <sup>(2)</sup>.

Si vedrà ora, dalle esperienze qui sotto esposte, che l'acido suberico, mentre non fornisce, a condizioni eguali, quantità riconoscibili di idrocarburo, dà invece una maggior quantità di prodotti secondari, la massima parte dei quali è costituita da composti non saturi e specialmente si tratta di acidi monobasici e di sali eterei che questi acidi formano con altri residui della decomposizione anodica.

Più particolarmente adunque la mia attenzione era rivolta ad accertare, durante la elettrolisi, la eventuale formazione di idrocarburo a catena chiusa, della serie aliciclica e precisamente del *cicloesano*, o esaidrobenzene, il quale potrebbe prendere origine quando, giunto all'anodo il residuo dell'acido suberico e depostavi la doppia carica negativa, subisca la decomposizione nota abbandonando contemporaneamente i due  $\text{-COO-}$  e chiudendosi ad anello.

Questo caso della formazione di un idrocarburo ciclico saturo, che non s'è mai potuto accertare per catene a 3 e 4 atomi di carbonio provenienti dagli acidi glutarico ed adipico, appariva d'altra parte più verisimile nel caso dell'acido suberico, perchè la posizione relativa dei 6 atomi di carbonio nello spazio, meglio si dovrebbe prestare ad una chiusura dell'anello. (Meglio ancora ciò si dovrebbe verificare per il residuo pentacarbonico dell'acido pimelico, alla cui preparazione in grande sto provvedendo presentemente, per decidere la questione).

<sup>(1)</sup> Loc. cit. In una recente Nota Walker comunica che, analogamente a ciò che ha luogo per l'acido glutarico, anche l'acido dimetilglutarico sottoposto ad elettrolisi sotto forma di sale bisodico, dà, anzichè dimetilciclopropane, un idrocarburo a catena aperta,

<sup>(2)</sup> Loc. cit.

*Preparazione dell'acido suberico.* — L'acido suberico che doveva venir sottoposto alla decomposizione elettrolitica fu preparato ossidando con acido nitrico l'olio di ricino (semi italiani - Erba) secondo le prescrizioni di Etaix <sup>(1)</sup>. Siccome però per la preparazione in grande si richiede una sorveglianza ininterrotta, in causa della grandissima quantità di schiuma che si produce improvvisamente, soprattutto al principio della reazione, il processo fu modificato nel modo seguente: In un pallone, di circa 4 litri di capacità, si introducevano 400 grammi di olio di ricino e 200 grammi di acido nitrico ( $d = 1.25 - 1.35$ ) e si riscaldava a b. m. bollente. Il pallone era munito di agitatore di vetro a palette snodate, messo in moto da una piccola turbina elettrica di  $\frac{1}{20}$  HP. Appena incominciata la reazione, con vivissimo sviluppo di vapori nitrosi, si aggiungevano poco a poco, continuando l'agitazione ed il riscaldamento, altri 600 gr. di acido nitrico della stessa concentrazione, mediante un imbuto a robinetto. È preferibile, durante questa operazione, di condensare i vapori che si svolgono, adattando nell'interno del collo del pallone un refrigerante cilindrico di vetro, attraverso il quale passa l'asta dell'agitatore. Dopo un paio di ore circa è cessato lo sviluppo vivo di vapori nitrosi ed allora si completa la reazione riscaldando ulteriormente per circa un'ora su bagno di sabbia.

Il prodotto della reazione si versa poi, ancor caldo, in un imbuto a robinetto, per mezzo del quale si separano i due strati liquidi. Quello oleoso, ambraceo, si fa bollire con due litri di acqua e dopo una nuova separazione si uniscono i liquidi acquosi, mentre la parte oleosa, che ormai è completamente solubile nei carbonati alcalini, si dovrà sottoporre poi ad una nuova ossidazione nello stesso modo a porzioni di 400 gr. per volta. I liquidi acquosi riuniti, dopo una distillazione parziale per separare gli acidi volatili formati (specialmente enantico), si concentrano al punto che per raffreddamento si rapprendano in una massa microcristallina, dall'aspetto spugnoso, la quale è costituita da una miscela di acidi suberico ed azelaico.

Così ottenuti questi due acidi e lavati per aspirazione alla pompa ed essiccati, sono di aspetto bianchissimo e privi di acidi grassi; essi richiedono solo di essere separati, il che riesce a bastanza facilmente mediante successive estrazioni con etere <sup>(2)</sup>. La mescolanza è costituita quasi costantemente da parti eguali dei due acidi e nei varî momenti della separazione si riconosce facilmente la composizione della miscela, determinandone il punto di fusione ed osservando l'aspetto della massa che ricristallizza dopo essere stata per alcun tempo fusa. L'etere discioglie i due acidi in proporzione alquanto diversa e precisamente 100 di etere disciolgono a 15° circa 0.8 di ac. suberico e 2.5 di acido azelaico. Si tratta perciò la miscela, divisa in porzioni di 200 gr. ciascuna, con il decuplo circa di etere. Sulla parte indisciolta,

<sup>(1)</sup> A. ch. [7], 9, 384.

<sup>(2)</sup> v. Gantter e Hell (Ber. d. d. ch. Ges. XIV, 1545).

separata per decantazione del liquido etero, aspirata rapidamente alla pompa ed asciugata, si ripete il trattamento. Dopo la prima operazione, la miscela, che prima fondeva intorno a  $100^{\circ}$ , ha già un punto di fus. vicino a  $128^{\circ}$ ; dopo la seconda il punto di fus. è a  $139^{\circ}$  e tale si mantiene nelle operazioni successive. Dopo 3 estrazioni, da 1500 gr. di miscela secca restano indisciolti 580 gr. di acido suberico, il quale però contiene ancora 2-3 % di acido azelaico. Questo non si può eliminare, se non si ricorre alla fusione e successiva triturazione diligente, prima di sottoporlo a nuovo trattamento con etere. L'acido suberico, che si ottiene da ultimo, cristallizza da vari solventi (acqua, etere) in bellissime tavolette fragili, trasparenti, che fondono a  $140^{\circ}$  ed hanno tutti i caratteri di un prodotto purissimo.

Così furono preparati 800 gr. di acido suberico, del quale si fece il sale bipotassico, che doveva venir sottoposto alla elettrolisi.

Se si ripete l'ossidazione con acido nitrico sui liquidi oleosi separati dalle soluzioni acquose nelle varie operazioni, essi si trovano ridotti in fine ad una piccola quantità di olio più denso, il quale per trattamento ulteriore non fornisce più gli acidi suberico ed azelaico, ed è costituito da altri acidi, tra i quali abbondano, com'è noto, anche altri omologhi della serie ossalica.

La miscela acida ottenuta, rappresenta, dopo aver subito purificazione, circa il 30 per cento dell'olio adoperato e quindi il rendimento in acido suberico è dato da circa il 15 per cento. È da credere, dato il modo di preparazione, che questo rendimento sia poco lontano dal limite massimo praticamente raggiungibile e forse anche, rispetto alla composizione dell'olio, teoricamente prevedibile.

Quanto alla separazione completa dei due acidi, essa non è possibile se non con una serie di altre manipolazioni lunghe, le quali consistono specialmente nella separazione dei rispettivi sali che presentano qualche differenza nella solubilità.

*Elettrolisi del suberato bipotassico.* — La soluzione, che doveva essere sottoposta alla elettrolisi, si preparava nel modo seguente: 10 gr. di acido si trasformavano in sale bipotassico, trattando con la quantità teoricamente richiesta di  $K_2CO_3$  esente di cloro e se ne faceva una soluzione di 50 cc. Si aveva così una concentrazione di 28.8 %. Una concentrazione simile si è mostrata la più adatta per la sua conducibilità; molto più concentrata, d'altra parte, non si potrebbe avere, data la solubilità del sale.

La decomposizione si operava in un recipiente di vetro cilindrico, del diametro di circa 4 cm.; nel liquido venivano immersi gli elettrodi di platino di dimensioni eguali (8 cm<sup>2</sup>).

Alcune prove istituite a fine di provocare la decomposizione in una cellula elettrolitica, i cui spazi anodico e catodico potevano venir separati da un setto poroso, mostrarono subito che non era possibile ottenere una de-



composizione a bastanza profonda, perchè in breve l'acido si trasportava tutto nello spazio anodico, com'era del resto prevedibile, ed ivi, data la sua piccola solubilità, si separava pressochè completamente e la conducibilità veniva tosto a mancare. Invece, adoperando la cellula semplice, la corrente passa in modo regolare e conservando quasi inalterata la conducibilità, fino a tanto che c'è acido suberico nella soluzione.

La elettrolisi della soluzione fu eseguita con una corrente della densità di circa 0.5 A.; si stabiliva così un voltaggio di circa 12 V., essendosi mantenuta la temperatura al disotto di 45° mediante una viva corrente di acqua fredda, che si faceva circolare all'esterno del recipiente.

Tutte queste condizioni furono scelte dopo una serie di prove preliminari, consistenti in analisi dei gas che sfuggivano dalla cellula durante la elettrolisi. Così la reazione procede in modo apparentemente a bastanza semplice e la decomposizione si ha continua e regolare.

Ciò che si osserva subito, al primo passaggio della corrente, è la formazione di un olio leggermente ambrato, dotato di odore etereo e che si raccoglie in uno strato sottile alla superficie del liquido. In capo a 2  $\frac{1}{2}$  - 3 ore circa cessa la formazione di quest'olio, ed il liquido perde molto della sua conducibilità.

Come dimostrano le analisi eseguite a più riprese ed a determinati intervalli sui gas che si svolgono dalla cellula, il rapporto tra i componenti varia di poco durante la elettrolisi:

% in vol.	dopo 40'	dopo 100'	dopo 175'	Media
CO <sub>2</sub> . . . . .	17.4	14.2	14	15.5
Assorbito da Br . . . .	1.1	1.2	0.8	1
Ossigeno . . . . .	2.3	4.2	4.6	4
CO . . . . .	0.3	0.4	0.6	0.5
Idrogeno . . . . .	77	78	78	78

ed una piccola percentuale di prodotti organici volatili non assorbibili da Bromo.

Qui appare subito evidente che l'azione ossidante dell'ossigeno anodico si esplica in modo molto energico, perchè infatti gran parte di esso rimane fissato, anzichè mettersi in libertà allo stato di gas.

D'altra parte si vede come la decomposizione dell'acido suberico è molto profonda, fino dall'inizio della reazione, come appare dalla quantità rilevante di CO<sub>2</sub> che si sviluppa, anche non tenendo conto di quello che si fissa nella soluzione; inoltre si osserva che la produzione di CO<sub>2</sub> proveniente da questa decomposizione va diminuendo, man mano che l'acido suberico scompare. In capo a tre ore circa non rimangono in soluzione che piccolissime quantità di quest'acido ed al suo posto si sono sostituiti altri acidi, della cui natura ci occuperemo tra breve.

In ogni caso la soluzione assume decisa reazione basica ed ha proprietà riducenti sul liquido di Fehling e sulla soluzione ammoniacale di argento; il suo colore è alquanto imbrunito e l'imbrunimento, dovuto a processi di resinificazione, aumenta, se si fa ulteriormente agire la corrente sul liquido alcalino, o se lo si riscalda.

Così furono elettrolizzati circa 800 gr. di acido suberico, i quali diedero circa 30 cc. di un *olio* color ambra, di odore particolare etereo, che però tradisce la presenza di composti non saturi.

Vicino a questo olio si trova ancora, in parte emulsionata con esso, un'altra sostanza dall'aspetto oleoso, solubile in acqua e che non è altro che un *sapone* formatosi nella soluzione alcalina durante l'elettrolisi e separatosi da essa per avere oltrepassato il limite di solubilità.

Un grande numero di analisi furono eseguite fin da principio sui gas che sfuggivano dalla cellula, allo scopo di svelare ed eventualmente favorire la formazione di idrocarburi. Si provvide quindi con ogni cura a trattenere la parte gassosa che avrebbe potuto sfuggire al controllo.

Gli idrocarburi che avrebbero potuto formarsi nella reazione, saturi o no, a catena aperta o chiusa, dovevano presumibilmente essere costituiti da molecole a 6 atomi di carbonio. Il punto di ebollizione di tali sostanze, che sono liquide a temperatura ordinaria, si trova vicino a 80°, pur tuttavia la loro tensione di vapore, che è simile a quella del benzolo, avrebbe potuto favorire una rapida evaporazione e quindi la loro perdita almeno parziale, specialmente data la temperatura del liquido nella cellula ed il continuo svolgimento di gas. Perciò, alla bocca di uscita della cellula, il gas veniva fatto passare, attraverso un tubo adduttore, per un refrigerante a serpentino (tipo St. Claire Deville per gas) immerso in ghiaccio e sale od anche in anidride carbonica solida. Operando per ore di seguito con tale dispositivo, non una goccia di liquido organico si potè mai ottenere condensato. Era accertato così, che, se gli idrocarburi cercati si formavano, essi dovevano rimanere tutti nella cellula e verosimilmente mescolati all'olio soprannuotante.

**Anatomia.** — *Contributo allo studio dello sviluppo del Nucleo rosso (Nucleus tegmenti).* Nota preliminare sopra lo sviluppo del nucleo negli embrioni di maiale del dott. PRIMO DORELLO, presentata dal Socio TODARO.

Le nostre conoscenze sopra il Nucleo rosso del tegmento, sebbene questa formazione sia stata oggetto di parecchi lavori per opera di Forel, Gudden. Vegas, Mingazzini, Mahaim, ecc., sono tuttora assai manchevoli, sicchè questo nucleo ci si presenta ancora assai oscuro, tanto per quello che si riferisce ai suoi rapporti colle formazioni vicine, quanto per il suo valore funzionale.

Si può dire che l'unico fatto ben dimostrato ed accettato da tutti e che le cellule della porzione posteriore del nucleo inviano i loro cilindrassili verso l'indietro, per partecipare alla costituzione del peduncolo cerebellare superiore, ed infatti il taglio del peduncolo cerebellare di un lato produce atrofia delle cellule posteriori del Nucleo rosso del lato opposto.

Molto più incerti invece sono i rapporti che il Nucleo rosso contrae con parti superiori del cervello, talamo, corteccia cerebrale, a proposito dei quali abbiamo solo scarse osservazioni, che mostrano come profonde alterazioni di queste parti fanno risentire la loro influenza sul Nucleo rosso.

Il Mahaim, nel suo accurato lavoro sopra la struttura anatomica del Nucleo rosso dei roditori, oltre ad aver sostenuto la presenza di un nucleo accessorio, che egli chiamò *Nucleus minimus*, sostenne che nel Nucleo rosso si dovevano distinguere tre parti: una anteriore poco sviluppata, che non ha rapporti col peduncolo cerebellare superiore del lato opposto e che probabilmente manda i suoi cilindrassili alla parte non crociata di questo peduncolo, e quindi alla corteccia cerebellare; una media, che rappresenta la parte principale del nucleo ed è formata da cellule piccole e mezzane: i cilindrassili di queste cellule vanno al peduncolo cerebellare superiore del lato opposto, emettono però numerose collaterali destinate alla formazione reticolare e che, secondo l'autore, sarebbero sufficienti per mantenere l'attività delle loro cellule di origine anche dopo il taglio della parte distale dei cilindrassili di queste. La terza porzione, che è la più posteriore, è costituita prevalentemente di grosse cellule, le quali inviano i loro cilindrassili al peduncolo cerebellare superiore del lato opposto e degenerano completamente dopo il taglio di questo.

Anche le ricerche puramente istologiche sul Nucleo rosso sono state relativamente povere di risultati. Si sa che nell'uomo e nelle scimmie il Nucleo rosso è formato di cellule fortemente ravvicinate tra loro, in modo di dar luogo ad una formazione globosa, compatta, ben distinguibile ad occhio nudo; che queste cellule hanno grandezza variabile da 20 a 76  $\mu$  e presentano grossi dendriti poveri di ramificazioni. Invece negli altri animali le cellule sono piuttosto diffuse, in modo di dar luogo ad un nucleo a confini assai vaghi. Anche le osservazioni per determinare la direzione dei cilindrassili emanati da queste cellule hanno dato risultati contraddittori. Infatti, mentre Forel ammise che la maggior parte dei cilindrassili si portassero verso il rafe, Kölliker sostenne che essi si dirigevano soprattutto dorsalmente e lateralmente.

In vista di questi risultati così incerti e variabili ho creduto non dovesse riuscire privo d'interesse lo studio dello sviluppo del Nucleo rosso.

Le mie ricerche per ora si sono limitate al maiale, del quale mi è riuscito raccogliere un abbondante materiale, quindi in questa breve Nota preliminare mi limiterò ad esporre solo i risultati ottenuti in questa specie.



La prima comparsa del Nucleo rosso, come formazione ben distinta, si ha assai precocemente, cioè in embrioni di mm. 52 di lunghezza, sebbene già in embrioni di mm. 40 un certo addensamento di cellule nervose embrionali, per nulla differenziate dalle circostanti, in corrispondenza della metà anteriore del pavimento del mesencefalo possa esser significato come il primo inizio della formazione del nucleo.

Negli embrioni di mm. 52 adunque nello spessore della porzione anteriore o discendente del pavimento del cervello medio, all'unione del terzo ventrale coi due terzi dorsali, appare l'abbozzo del Nucleo rosso, situato ventralmente ed un po' lateralmente agli abbozzi del nucleo del III paio e del fascetto longitudinale posteriore, già bene sviluppato, lateralmente ed un po' caudalmente al fasciculus retroflexus, che si presenta pure assai distinto.

L'abbozzo del Nucleo rosso è costituito da un grosso accumulo di neuroblasti, di forma ovoidale, coll'asse maggiore diretto caudo-cranialmente ed un po' dall'interno all'esterno. Esso presenta una lunghezza di circa  $700\ \mu$  ed una larghezza di circa  $500\ \mu$ , colla estremità anteriore raggiunge il limite tra cervello medio ed intermedio, mentre che colla posteriore corrisponde presso a poco alla parte media della bigemina anteriore.

L'accumulo si differenzia assai bene dalla sostanza granulosa, nella quale è immerso, oltre che per i caratteri istologici dei suoi elementi, anche per uno speciale rivestimento fibrillare, poverissimo di nuclei, che lo circonda e lo separa dalle parti circostanti. Questa specie di rivestimento midollare embrionale circonda tutto il nucleo, salvo che alla sua estremità craniale, e raggiunge uno spessore di circa  $50\ \mu$ .

Le cellule che costituiscono l'abbozzo del Nucleo rosso non sono uniformemente distribuite, ma si trovano riunite in gruppi di 10-20 elementi; i singoli gruppi sono più o meno nettamente separati tra loro da una sostanza finamente fibrillare, la quale si presenta più abbondante nella parte centrale del nucleo.

I neuroblasti del Nucleo rosso si presentano nello stesso stadio di evoluzione istologica, nel quale si trovano i neuroblasti del nucleo del III paio; cioè ogni neuroblasto è formato da un nucleo, il cui volume è appena un po' superiore a quello dei nuclei dello strato granuloso circostante rimasto indifferenziato, e, sebbene intensamente colorato, a differenza di quanto succede per questi ultimi, lascia intravedere nel suo centro un punto più oscuro, il nucleolo.

Ad un polo di ciascun nucleo sta addossata una piccola massa protoplasmatica, allungata, di forma variabile, a confini poco netti: nelle cellule poste nel corpo del nucleo questa massa protoplasmatica ha un orientamento variabile; invece nelle cellule più periferiche è quasi costantemente rivolta verso il centro del nucleo. Siccome la posizione della massa protoplasma-

tica corrisponde al polo cilindrassile della cellula, se ne può dedurre che il cilindrassile delle cellule periferiche del Nucleo rosso, almeno nelle prime epoche dello sviluppo, è rivolto verso il centro del nucleo stesso.

Ma di fronte a questi elementi, che costituiscono la massa principale del Nucleo rosso e che sono proprio alle prime fasi del loro sviluppo, nella porzione craniodorsale del nucleo si riscontrano delle cellule gangliari in numero però assai scarso, le quali sono in un periodo evolutivo molto più avanzato, comparabile a quello che si riscontra nelle cellule dei nuclei bulbari. Esse presentano infatti un nucleo piuttosto grande, di aspetto vescicoloso, con un reticolo povero di cromatina, ma con un distinto nucleolo: questo nucleo è in gran parte circondato da una sviluppata massa protoplasmatica, dalla periferia della quale si vedono partire brevi e tozzi prolungamenti.

Non ho mai riscontrato tra gli elementi del nucleo rosso alcuna figura cariocinetica.

La parte mediale del nucleo si vede già traversata da fibre discendenti, che sono le fibre radicolari del III paio.

Le cellule della lamina cerebellare e quelle del talamo si trovano in una fase istogenetica molto meno evoluta di quelle del Nucleo rosso.

Esaminando embrioni di mm. 80 di lunghezza, si vede che il Nucleo rosso, pur conservando la sua posizione, è aumentato di volume e, per essere notevolmente diminuite di numero le cellule della sua parte centrale nonchè della parete dorsocraniale, ha assunto un aspetto che ricorda in qualche modo quello delle olive bulbari e cerebellari, presenta cioè una parte centrale povera di cellule, ricca di tessuto fibrillare che costituisce una specie di centro midollare: questo centro per mezzo di un'apertura, ilo, rivolta dorsocranialmente, comunica colla sostanza fibrillare posta al disopra ed al davanti della estremità craniale del nucleo.

Le cellule del Nucleo rosso mostrano anche in questo stadio la tendenza a raggrupparsi, mettendosi talvolta attorno ad un centro, talvolta disponendosi in serie lineari. Esse sono più evolute, che nello stadio antecedente, presentano un nucleo di  $8\mu$  con abbondanti granulazioni cromatiche, con un distinto nucleolo. Il protoplasma è aumentato di volume ed ha la forma di una semiluna, con un margine interno abbracciante la metà od anche i due terzi del nucleo, con un margine esterno, talvolta regolare, talvolta fornito di dentellature che si perdono subito nella sostanza reticolare circostante.

Alla estremità anteriore del Nucleo rosso si rinvencono, come nello stadio antecedente, poche cellule gangliari, molto più evolute, con nucleo vescicoloso, povero di cromatina, ma con distinto nucleolo, con corpo protoplasmatico voluminoso, fornito di sviluppati prolungamenti.

In embrioni di mm. 95 la forma e la posizione del Nucleo rosso non sono affatto cambiate: la sua lunghezza è di un millimetro, la sua lar-



ghezza di mezzo millimetro. Si comincia però a notare una differenza nello sviluppo dei vari elementi a seconda della posizione che occupano, poichè le cellule del polo caudale e della parte postero-esterna sono più grandi e più evolute di quelle della parte infero-anteriore.

Le cellule più evolute, cioè quelle del polo caudale, presentano un nucleo di circa 10  $\mu$  di diametro, con un fino reticolo carico di sottili granulazioni cromatiche, con uno e talvolta due nucleoli assai sviluppati. Il corpo protoplasmatico abbraccia tutto il nucleo, ha una forma generalmente ovale, con un diametro massimo di 18-22  $\mu$ . Dalla sua periferia si veggono partire parecchi prolungamenti, poco colorati, che si perdono subito nella sostanza reticolare circostante.

Alla estremità craniale del nucleo si trovano ancora più sviluppate le grosse cellule, che abbiamo riscontrate negli stadi antecedenti: esse hanno ora un diametro di circa 30  $\mu$ , presentano dei robusti prolungamenti, si trovano sparse senza alcun ordine ed in tutte non sono più di 90 a 100 per ciascun lato.

Negli embrioni di cm. 12 il Nucleo rosso si trova in notevole incremento; infatti esso presenta una lunghezza di mm. 2 ed una larghezza di mm. 0,8. Molto ben sviluppato è lo strato midollare che lo riveste, specialmente nel polo caudale, ove vengono a perdersi numerose fibre della decussazione della calotta. Abbondanti fascetti di fibre a direzione longitudinale si vedono penetrare pel polo caudale nel centro midollare ed in parte perdersi in questo, in parte riuscire per la porzione cranio-dorsale aperta del nucleo.

Le cellule che formano la massa principale del nucleo mostrano, andando cranio-caudalmente, un graduale incremento nello sviluppo istologico e nel volume.

Quelle del polo caudale, che sono le più sviluppate, presentano un diametro di 20-25  $\mu$ , hanno un corpo protoplasmatico a struttura alveolare, avido di colori, di forma variabile, con brevi e tozzi prolungamenti, presentano un nucleo vescicoso, generalmente un po' eccentrico, di 10-12  $\mu$  di diametro, fornito di piccole e scarse granulazioni cromatiche con uno o due nucleoli fortemente colorati.

In un corrispondente periodo evolutivo si trovano pure le cellule del nucleo del III paio.

Alla estremità craniale del nucleo rosso si rinvencono, sempre in scarso numero, quelle cellule più grandi e più evolute già rilevate negli stadi antecedenti.

A quest'epoca cominciano a differenziarsi le cellule della Substantia nigra del Sömmerring.

In embrioni di stadi successivi, che io ho esaminati fino alla lunghezza di cm. 24, si nota sempre un continuo incremento nello sviluppo ed aumento di volume delle cellule del polo caudale del Nucleo rosso, mentre che le altre,



salvo le poche più craniali, mostrano sempre più un relativo rallentamento nel loro sviluppo.

Negli embrioni di cm. 15 le cellule del polo caudale hanno generalmente un diametro di 25-30  $\mu$ , che può diventare anche di 50  $\mu$  in embrioni di 19 cm. In questi ultimi le cellule mostrano parecchi e voluminosi prolungamenti protoplasmatici ed inoltre la prima formazione di zolle cromofile, che si presentano rotondeggianti od ovali, a confini poco netti, localizzate specialmente nella parte periferica del protoplasma. Il nucleo di queste cellule ha un diametro di 12-15  $\mu$  e si presenta poverissimo di granulazioni cromatiche, ma ha un grosso nucleolo intensamente colorato.

Queste differenziazioni divengono ancora più spiccate negli embrioni di 24 cm. nei quali pure la Substantia nigra del Sömmering forma un distinto strato.

Da queste sommarie notizie, che riguardano le varie fasi di sviluppo del Nucleo rosso nel maiale, si possono trarre le seguenti conclusioni.

Il Nucleo rosso si presenta in un'epoca embrilogica assai precoce, relativamente alle formazioni colle quali si ritiene abbia rapporti. Esso infatti compare contemporaneamente al nucleo del III paio, ha uno sviluppo istologico, che va di pari passo con quello di questo nucleo, ed è quindi molto più precoce che non quello della corteccia cerebellare e delle formazioni del cervello intermediario.

Il Nucleo rosso del maiale durante il suo sviluppo non presenta quella forma diffusa, che tutti gli autori hanno riscontrato in molti animali, salvo le scimmie, allo stato adulto, ma presenta specialmente nel polo caudale confini ben netti, alla delimitazione dei quali contribuisce la presenza di uno strato midollare di rivestimento.

Ma mentre per la nettezza dei suoi confini il nucleo rosso del maiale allo stato embrionale somiglia a quello dell'uomo e delle scimmie, se ne differenzia invece per la presenza di una parte centrale assai povera di cellule, ricca invece di sostanza reticolare, per la presenza cioè di un centro midollare, il quale comunica per una specie di ilo, colla sostanza reticolare, che riveste l'estremità cranio-dorsale del nucleo. Quindi il nucleo rosso dell'embrione di maiale presenta una forma, che somiglia a quella dell'oliva bulbare e cerebellare.

Pel modo col quale si sviluppano gli elementi del Nucleo rosso del maiale possiamo distinguere in questa formazione tre parti, che corrispondono in qualche modo a quelle che Mahaim sperimentalmente ha potuto distinguere nei roditori.

Abbiamo cioè una porzione anteriore, che è la meno considerevole, perchè consta solo di un centinaio di cellule per ciascun lato. Essa occupa l'estremità cranio-dorsale del nucleo e si differenzia per il precoce e rapido sviluppo dei suoi elementi, i quali si accrescono notevolmente ed assumono

quasi l'aspetto di cellule nervose adulte, quando è appena da poco incominciata la differenziazione dei neuroblasti nelle altre due porzioni.

A questa porzione anteriore del nucleo seguono le altre due, che si può dire formano la massa essenziale del nucleo stesso. Esse dapprima non si distinguono una dall'altra, poichè procedono in modo perfettamente uguale nel loro sviluppo. Più tardi però si differenziano, perchè le cellule della parte caudale assumono un volume maggiore ed una differenziazione istologica più rapida. Tuttavia tra le due porzioni non si ha una netta demarcazione, poichè i cambiamenti di volume e di aspetto degli elementi avvengono in modo graduale, man mano che dalla porzione caudale si passa alla porzione craniale del nucleo.

Ricorderò finalmente che nel maiale durante lo sviluppo non mi è riuscito di riconoscere nettamente alcuna formazione speciale paragonabile al Nucleus minimus, trovato dal Mahaim nei roditori.

E. M.